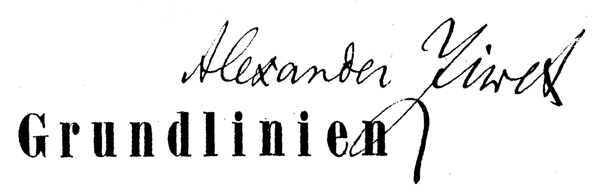



Hosted by Google



Grundlinien

der

neueren ebenen Geometrie

mit

einer Sammlung von mehr als 1000 erläuterten Aufgaben,
einem Anhang über die Anwendung der neueren Geometrie
auf Optik

und

zehn Figuren-Tafeln.

Von

Christoph Paulus,
Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt auf dem Salon bei Ludwigsburg.



Stuttgart.
Verlag von W. Paulus.
1853.

Druck der K. Hofbuchdruckerei Zu Guttenberg in Stuttgart.

Vorrede.

Es ist nicht zu verwundern, dass die sogenannte neuere oder höhere Geometrie von ihrem ersten Auftreten an, trotz des Kampfes, den sie sich ihrer Methode *) halber zuzog, doch die allgemeine Anerkennung von Seiten der grössten Mathematiker erfahren hat. Was man auch über ihre Methode denken mochte, ihre Leistungen waren überraschend. Eine Reihe von neuen Sätzen über die Linien und Flächen der ersten und zweiten Ordnung, welche ein ganz neues Licht verbreiteten, alle Lücken ausfüllten, die die Wissenschaft bis dahin noch fühlen liess, und welche die Auflösung vieler und gerade der schwierigsten Aufgaben möglich machten, verlieh ihr einen Achtung gebietenden Glanz. Zu verwundern ist es aber, dass die neuere Geometrie bei all' diesen Vorzügen so wenig gekannt und studirt wird. Viele Lehrer der Mathematik kennen sie heut zu Tage noch kaum mehr als dem Namen nach, und es ist nicht viel mehr zu ihnen gedrungen, als der dürftige Begriff der harmonischen Theilung und die unmittelbar damit zusammenhängenden Sätze. Nirgends ist sie meines Wissens noch zum Unterrichtsgegenstand erhoben. Zu dem kommt noch, dass es dem Scharfsinn der Analytiker gelungen ist, Mittel aufzufinden, um auch in ihrer Methode die Resultate der neueren Geometrie zu deduciren. Es hat den Anschein, als sei man geneigt, zu glauben, die neuere Geometrie sei für die Wissenschaft entbehrlich.

---

*) Diese Methode hat übrigens, seit M. Poncelet sein Traité des propriétés projectives des figures geschrieben und damit den Grund zur neueren Geometrie gelegt hatte, eine bedeutende Entwicklung, man kann sagen, eine ganze Umgestaltung erlitten.

Diess wäre ein grosser Irrthum. Sollte die Wissenschaft eine Methode entbehren können, welche in dem kurzen Zeitraum von einigen Decennien eine Reihe von Entdeckungen gemacht hat, in deren Licht die bisherigen Kenntnisse desselben Gegenstandes nur als dürftige Bruchstücke erscheinen und welche ein Jahrhundert lang der eifrigsten Forschung der alten (analytischen) Methode unzugänglich waren. Aber auch für sich betrachtet, macht die Methode der neueren Geometrie jedem unbefangenen Beobachter gewiss den Eindruck, dass die Wissenschaft an ihr einen werthvollen, unentbehrlichen Fund gemacht habe; denn schwerlich wird eine andere Disciplin aufzufinden sein, welche eine so abgerundete von Einer Anschauung durchdrungene Gestalt aufzuweisen hätte, wie die neuere Geometrie. Wie sollte überhaupt die Geometrie eine Methode entbehren können, durch welche sie eine Fülle von neuen jedenfalls unentbehrlichen Begriffen gewonnen hat. Ich erinnere nur an die Begriffe der Punktreihe und des Vielstrahls, des Vielecks und des Vielseits, der Conformität und Involution, der Collineation und Affinität, der Reciprocität und Polarität. Auch die analytische Geometrie, als sie die Resultate der neueren Geometrie zu entwickeln anfing, hat diese Begriffe, wie sie von der neueren Geometrie geschaffen wurden, unverändert aufgenommen und dadurch das Zeugniss abgelegt, dass dieselben für die Wissenschaft unentbehrlich seien. Nun sind aber jene Begriffe nichts Anderes als die Methode der neueren Geometrie selbst. Wer sie hat, der hat auch die Methode der neueren Geometrie, neben ihnen bedarf er der Kunstgriffe der Analysis nicht, sie selbst sind ihm die Loupe, welche er nur an das Auge setzen darf, um den ganzen Reichthum der Gestalten, die dem unbewaffneten Auge verborgen sind, in allen ihren Einzelnheiten zu erschauen. Damit soll der analytischen Methode nicht zu nahe getreten werden, sie behält ungeschmälert ihre hohe Bedeutung. Aber wie der Raum, indem er Grösse und Gestalt ist, zwei Seiten hat, so bedarf die Geometrie auch zweier gleich unentbehrlicher Methoden; die Methode des Maasses und die Methode der Lage, die Methode der analytischen und die der neueren Geometrie. In dem Zusammenwirken dieser zwei Methoden erst wird die Geometrie ihre

Aufgabe, die Welt des Raumes zu erforschen, erfüllen können. Dass daher die Entdeckung der neueren Geometrie für die Wissenschaft des Raumes von grosser Bedeutung und selbst epochebildend ist, wird von Vielen geahnt, und ist auch meine Ueberzeugung. Und wenn ich es unternommen habe eine umfassendere *) Bearbeitung der neueren Geometrie, wenigstens einmal des planimetrischen Theiles, zu veröffentlichen, so glaube ich dem Bedürfnisse der Zeit und dem Wunsche Vieler zu entsprechen.

Bei dieser Arbeit liess ich mich durch folgende Rücksichten leiten.

Vor Allem schien mir die Trennung der Geometrie der Ebene von der des Raumes höchst wünschenswerth. Ich konnte nicht finden, dass diese Trennung dem Geiste der neueren Geometrie widerspreche, ich überzeugte mich im Gegentheil, dass auch die Geometrie der geraden Linie mit Vortheil abgesondert und für sich behandelt werden könne (I. Buch), indem die der neueren Methode zu Grunde liegenden Begriffe, nämlich die Begriffe der Conformität und Involution, schon bei der Beschränkung auf die gerade Linie, und hier gerade frei von allen fremdartigen Vorstellungen, in ihrer ganzen Reinheit entwickelt werden können. Auch wurde mein Streben, den allseitig ausgedehnten Raum vorerst bei Seite zu lassen, durch die Entdeckung der centrischen Collineation belohnt.

Bei der Frage, welches von den Hilfsmitteln der neueren Geometrie zum leitenden und durchgreifenden zu erheben sei? entschied ich mich für die Collineation. Wenn sie auch bei der Behandlung der Kegelschnitte nicht die Allgemeinheit gewährt wie das Polarsystem, welches Staudt zu Grund legt, so hat sie dagegen den Vortheil einer vollkommenen Einheit

*) Die deutsche Literatur hat nur zwei bedeutende Werke über diesen Gegenstand aufzuweisen, welche beide als klassisch zu bezeichnen sind: „Jakob Steiner's systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, 1832," und „v. Staudt's Geometrie der Lage, 1847." Von dem ersten dieser Werke ist von sieben Theilen nur einer erschienen, und das zweite hat sich dadurch enge Schranken gesetzt, dass der Begriff des Maasses ganz vermieden werden sollte.

der Anschauung, und bietet zugleich sehr viele Anknüpfungspunkte für die altherkömmliche Anschauungsweise. Gewiss wird es Jedem der sich an das Studium der neueren Geometrie macht, erwünscht sein, die Kreislehre (Buch V) in ihrem Unterschied von den anderen Kegelschnitten, und die mit der bisherigen Anschauung verwandte focale Entwicklung der Kegelschnitte (Buch VI) zuerst kennen zu lernen und dadurch einen festen Boden zu gewinnen. Trotz dieser Bevorzugung der Collineation wurden die übrigen Hilfsmittel der neueren Geometrie nicht übergangen. Es wurde die Reciprocität und Polarität und von der symbolischen Geometrie *) die Begriffe der imaginären Punkte und Richtungen entwickelt und benützt, und den letzteren ein besonderes Buch (VIII) gewidmet, weil ich erkannte, dass diese Begriffe eine Einfachheit der Anschauung und Ausdrucksweise gestatten, welche sonst vergebens gesucht wird. Die Bedeutung dieser Begriffe erkannte ich hauptsächlich in ihrem ganzen Werthe, als es mir gelang, die Conformität der Kegelschnitte auch auf die imaginären Punkte und Richtungen auszudehnen (§. 118); **) und dadurch den Boden zu gewinnen, welcher der Erforschung der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier in einer Ebene liegenden Kegelschnitte, und der Oskulation der Kegelschnitte zur Basis dienen konnte. (Buch IX.)

So sehr ich jedoch auch bemüht war, nichts ausser Acht zu lassen, was der Methode der neueren Geometrie angehört, so glaubte ich doch hinsichtlich des grossen vorliegenden Materials eine Sichtung vornehmen zu müssen. Ich wollte einerseits nichts Wesentliches übergehen, aber auch andererseits die Geduld des Lesers durch allzu reiches Material nicht auf die Probe setzen. Was auf den Gang im Ganzen einen Einfluss auszuüben, und eine tiefere Einsicht zu erzeugen im Stande war, musste berücksichtigt werden, was nur für sich von Interesse zu sein schien, wurde weggelassen. Zur leichteren Uebersicht habe ich jedem Abschnitt den Hauptinhalt

*) Die imaginären Curven, die allerdings nur vermittelst des Polarsystems entwickelt werden können, wurden nicht berücksichtigt.

**) Ein Satz der hiezu führt, wurde schon von Professor v. Staudt auf einem anderen Wege entwickelt, derselbe konnte aber ohne die anderen Sätze, §. 118, von keinen weitern Folgen sein.

vorangestellt, und denselben in allgemeiner Form, ohne auf eine bestimmte Figur hinzuweisen, ausgedrückt.

Um auch die praktische Seite der neueren Geometrie hervorzuheben, wurde dem Werke eine reiche Aufgabensammlung beigegeben, in welcher die Kreisberührungen und die Construction der Kegelschnitte eine besondere Berücksichtigung fanden, weil eben hierin die neuere Geometrie ihre glänzendsten Leistungen gemacht hat. In einem Anhang über die Anwendung der neueren Geometrie auf Optik soll gezeigt werden, wie die Methode der neueren Geometrie auch für die Naturwissenschaften folgereich ist. Wer noch nicht recht weiss, was er von der neueren Geometrie halten soll, den fordere ich auf, diese Früchte der neueren Geometrie in's Auge zu fassen und dadurch sein Urtheil bestimmen zu lassen.

Weil die neuere Geometrie wesentlich eine neue Methode ist, so hat sie auch eine eigene Terminologie geschaffen. Ich hielt mich in dieser Beziehung an die Vorgänge Steiner's und Staudt's, nur in einigen und theilweise strittigen Fällen fand ich mich veranlasst, Aenderungen vorzunehmen. Ich vertauschte die Ausdrücke »gerades Gebilde und Strahlenbüschel« mit »gerader Punktreihe und Vielstrahl;« weil ich glaubte durch diese Aenderung die richtige Anschauung der Sache wesentlich zu fördern. Die Gestalten des ebenen Systems sind nämlich, wenn man die Curven ausschliesst, das Vieleck und das Vielseit, zwei Ausdrücke, die nicht ohne Grund den Begriff der Vielheit an der Stirne tragen; denn das Vieleck setzt viele Punkte und ihre Verbindungslinien, und das Vielseit viele Richtungen und ihre Convergenzpunkte voraus. Die Punktreihe ist aber nichts Anderes, als ein Vieleck, dessen Ecken in einer Richtung liegen, und der Vielstrahl ist ein Vielseit, dessen Richtungen in einem Punkte convergiren. Es schien mir daher eine dringende Forderung der klaren Ausdrucksweise, dass auch diese besonderen und einfachen Gestalten die wesentlichen Merkmale der allgemeinen, und namentlich auch das Merkmal der Vielheit noch an sich tragen. Wie übereinstimmend lauten bei dieser Terminologie die ähnlichen Begriffe des Dreiseits und Dreistrahls, Vierseits und Vierstrahls etc. Und wenn nun auch die Punktreihe weniger hierin leistet, so erregt sie doch

auch den Begriff der Vielheit, während die sonst üblichen Ausdrücke des geraden Gebildes und des Strahlenbüschels eine so unbestimmte und unsichere Vorstellung hervorriefen, dass die von mir gemachte Veränderung vollkommen gerechtfertigt sein wird.

Eine andere, vielleicht noch mehr eingreifende Neuerung ist die Einführung des Begriffes der Conformität. Bei Staudt findet derselbe sich gar nicht, und zwar wohl desshalb nicht, weil er den Begriff des Masses ganz vermeiden und eine reine Geometrie der Lage schreiben wollte. Er unterscheidet daher nur projektivische und perspektivische Gebilde. Bei Steiner findet man dagegen alle drei Begriffe, aber nicht die gleichen Benennungen. Staudt's Verwendung der Ausdrücke projektivisch und perspektivisch zur Bezeichnung der Lage ist vollkommen gerechtfertigt, und es wird jetzt Niemand mehr einfallen können, die Steiner'sche Bezeichnung, wo schief und perspektivisch einander entgegengesetzt wurden, zu gebrauchen. Wenn aber jene Ausdrücke zur Bezeichnung der Lage verwendet werden sollen, so fehlt ein Ausdruck für die Bezeichnung der Gestalt, abgesehen von ihrer Lage, und welche Statt finden muss, wenn überhaupt die Merkmale der projektivischen und perspektivischen Lage anwendbar sein sollen. Es fehlt also ein Ausdruck, der das bezeichnet, was Steiner projektivisch heisst, und wofür Staudt keinen besondern Ausdruck hat, welcher Mangel wesentlich dazu beiträgt, das Verständniss des Staudt'schen Werkes zu erschweren. Diesem Mangel suchte ich durch den Ausdruck der Conformität abzuhelfen. Wie zwei Vielecke und Vielseite eine gewisse Uebereinstimmung der Gestalt an sich tragen müssen, um überhaupt in die unmittelbare Beziehung der Lage gesetzt werden zu können, welche perspektivisch heisst, oder in die vermittelte Beziehung der Lage, welche projektivisch heisst, so müssen auch zwei Punktreihen und Vielstrahlen eine gewisse Uebereinstimmung der Gestalt an sich tragen, um die Fähigkeit für jene Verhältnisse der Lage zu bekommen, und diese Gestaltsübereinstimmung heisst Conformität. Um die Nothwendigkeit dieses Begriffes ganz fühlbar zu machen, erinnere ich noch an die diesen Gattungsbegriffen untergeordneten Artbegriffe. Conforme Reihen können auch proportional

oder uniform, conforme Vielstrahlen können auch gleich sein; ebenso wie collineäre Vielecke und Vielseite affin, ähnlich oder congruent sein können. Alle diese Gestalten, die einfachen wie die zusammengesetzten, können aber entweder perspektivisch oder projektivisch gegen einander liegen, und auf alle Gestalten, welche nicht collineär oder conform sind, ist auch der Begriff der perspektivischen oder projektivischen Lage nicht mehr anwendbar.

Die Einführung des Begriffes der gemeinschaftlichen Vielstrahlen zweier Kegelschnitte ist, sobald man die gemeinschaftlichen Sekanten unterschieden hat, so sehr durch die Eigenschaft der Reciprocität geboten, dass keine besondere Rechtfertigung nöthig sein wird. Die Einführung des Modulus des Theilpunktes, der harmonischen und anharmonischen Theilung, der Collineation etc. wird gewiss die Billigung der Sachverständigen erhalten. Denn die Wissenschaft kann nur gewinnen, wenn sie einen Ausdruck für eine Erscheinung hat, die den Charakter des Eigenthümlichen und Specifischen an sich trägt.

Man sieht, wie der von mir eingeschlagene Weg in vielen Partien von den Wegen abweicht, die bisher betreten wurden. Es werden sich daher wenig Sätze finden, deren Entwicklung nicht grössere oder kleinere Abänderungen erfahren hätten; manche Strecken des Weges waren erst neu zu bahnen, dahin gehören unter Anderem die Entdeckungen, welche ich im VI. Buch fast seinem ganzen Umfang nach, und in grösseren Partien des VII. und VIII. Buchs niedergelegt habe. Wenn ich nun glaube, die Schwierigkeit, welche meine Aufgabe mit sich brachte, in der Hauptsache glücklich überwunden zu haben, so denke ich in den untergeordneten Dingen um so mehr auf die Nachsicht der Sachverständigen rechnen zu dürfen.*) Wenn meine Arbeit das

*) Ich erlaube mir hier selbst auf einen Umstand aufmerksam zu machen. In conformen und collineären Gebilden nannte ich durchaus die sich entsprechenden Elemente homolog. Dieselbe Bezeichnung gebrauchte ich häufig auch im involutorischen Systeme, wo die Bezeichnung zugeordnet vorzuziehen wäre. Man bekommt dadurch dreierlei Bezeichnungen für die sich entsprechenden Elemente: homolog in collineären, zugeordnet in den involutorischen, conjugirt in den Polarsystemen.

Studium der neueren Geometrie auf's Neue in Anregung bringt und neue Kräfte für diese junge Wissenschaft gewinnt, so war sie schon nicht vergebens. Wenn aber da und dort ein Lehrer oder eine Behörde dadurch veranlasst werden sollte, die neuere Geometrie unter die Unterrichtsfächer höherer Schulen aufzunehmen, so wäre diess der grösste Erfolg, den ich meiner Arbeit wünschen könnte.

Salon bei Ludwigsburg, im März 1853.

Chr. Paulus.

Inhaltsverzeichniss.

Neuntes Buch. Collineation der Kegelschnitte.

Zehntes Buch. Die Ellipse.

Elftes Buch. Die Hyperbel.

Zwölftes Buch. Die Parabel.

Aufgabensammlung.

Anhang.

Erstes Buch.

Die gerade Linie.

A. Modulus des Theilpunktes.

§. 1. Ist eine gerade Strecke (begrenzte Gerade) und auf ihr oder auf ihrer Verlängerung ein Theilpunkt gegeben, so heissen die Stücke, welche zwischen dem Theilpunkt und den Endpunkten der Geraden liegen, „Abschnitte des Theilpunktes." Ist ein Punkt ein innerer, so sind auch die Abschnitte innere und ihre Summe ist der Geraden gleich; ist der Theilpunkt ein äusserer, so ist der grössere Abschnitt ein übergreifender und der kleinere ein äusserer, und ihre Differenz ist der Geraden gleich.

Das Verhältniss der Abschnitte, welche ein Theilpunkt auf einer geraden Strecke bildet, heisst: „Modulus des Theilpunktes."

§. 2. Zwei Punkte auf der Richtung einer geraden Strecke heissen in Betreff ihrer Lage gleichartig, wenn sie zugleich innere Punkte oder auch zugleich äussere Punkte sind, sie heissen ungleichartig, wenn der eine Theilpunkt ein innerer und der andere ein äusserer ist.

Die Modulus zweier Theilpunkte einer Geraden heissen gleichgeordnet, wenn die Stellung der Abschnitte im Modulus mit der Lage derselben gegen die Endpunkte der Geraden übereinstimmt; wenn also die Vorderglieder des Modulus an einem Endpunkte der Geraden, und die Hinterglieder am andern Endpunkte derselben liegen.

§. 3. Die gleichgeordneten Modulus der inneren Theilpunkte einer Geraden sind alle von einander verschieden und durchlaufen alle stetig aufeinander folgende Werthe von Null bis Unendlich. Die Modulus der Endpunkte haben die extremen Werthe von Null und Unendlich, und der Modulus des Theilpunktes, welcher in der Mitte liegt, hat den Werth Eins. Die gleichgeordneten Modulus der äusseren Theilpunkte sind eben-



falls verschieden und durchlaufen alle stetig aufeinander folgenden Werthe von Null bis Unendlich. Die Modulus der Endpunkte haben die extremen Werthe von Null und Unendlich. Die Modulus der unendlich entfernten Punkte haben den Werth Eins.

§. 4. Zwei innere Theilpunkte einer Geraden, welche gleich weit von den Endpunkten derselben und daher auch gleich weit von der Mitte der Geraden abstehen, heissen symmetrisch.

Die gleichgeordneten Modulus zweier gleichartigen symmetrischen Theilpunkte haben solche Werthe, dass der eine die reciproke Zahl des andern ist; und umgekehrt, wenn zwei gleichartige Punkte solche Modulus haben, dass der eine die reciproke Zahl des andern ist, so sind sie symmetrisch.

§. 5. Die Mitte der Geraden kann betrachtet werden als der Ort, in welchem zwei symmetrische innere Punkte auf einander fallen.

Die unendlich entfernten äusseren Punkte einer Geraden sind ebenfalls symmetrische Punkte und werden, wenn sie auch wegen ihrer unendlichen Entfernung nicht als auf einander fallend betrachtet werden können, doch als solche angesehen, die in der stetigen Aufeinanderfolge der äusseren Punkte identisch sind.

Wenn daher auf einer Geraden beliebige innere und äussere Punkte gegeben sind, so werden nicht nur die einander zunächst stehenden, sondern auch die zwei äussersten der ganzen Reihe als solche betrachtet, die in der Anreihung auf einander folgen.

Die gerade Linie ist die einfachste Raum-Gestalt, die aber trotz der Beschränkung, welche der Raum in ihr erfährt, doch schon an der Unendlichkeit Theil nimmt, die dem Raum eigenthümlich ist. In dieser Gestalt gestattet schon die gerade Linie, ganz für sich betrachtet, der Methode den Zugang, welche die neuere Geometrie auszeichnet, und gerade in der Beschränkung auf diese einfache Raumform kann das Eigenthümliche der Methode der neueren Geometrie am besten erkannt werden.

Werden nun nur die Punkte in's Auge gefasst, welche in einer geraden Richtung liegen, so muss man sich zwar des Vortheils entschlagen, welcher im allseitig ausgedehnten Raum durch die Lage der Linien und Flächen zu einander dargeboten wird; man gewinnt aber dabei das, dass die Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden die allereinfachste ist,

denn die Entfernung der Punkte von einander bestimmt hier unmittelbar auch ihre gegenseitige Lage vollkommen. Sobald man aber die Entfernungen zwischen den Punkten einer Geraden mit einander vergleicht, so wird man zum Begriff des Maasses geführt, und es ist daher das Maass ihrer Entfernungen das einzige Mittel, welches für die Beziehungen ihrer Lage benützt werden kann. Nun ist zwar die Methode der neueren Geometrie gerade dadurch ausgezeichnet, dass sie das Hilfsmittel des Maasses und eben damit das der Rechnung auf ein Minimum zu reduciren wusste, aber eben dieses Minimum des rechnenden Elementes, welches auch in der neueren Geometrie noch übrig bleibt, *) wird auf dem bezeichneten Wege sogleich in sehr einfacher, ganz nackter und darum leichtfasslicher Form sich darstellen, und es wird daher dasselbe in diesem ersten Buche, wo nur die Punkte einer geraden Richtung betrachtet werden sollen, dem Wesentlichen nach für immer abgemacht werden, und jeder, der die neuere Geometrie auf diesem Wege kennen lernt, wird mit Vergnügen bemerken, wie mit so geringen Mitteln, die aber der Natur der Dinge entnommen sind, so Grosses geleistet werden kann.

Die analytische Geometrie bestimmt die Lage der Punkte einer geraden Linie dadurch, dass sie dieselben in eine Beziehung zu einem einzigen auf ihr gegebenen Punkte setzt, das Maass ihrer Entfernung von diesem Punkte angibt und noch durch vorgesetztes Plus- oder Minus-Zeichen anzeigt, auf welcher Seite von demselben sie liegen. Die neuere Geometrie bedient sich einer andern Methode: Sie bezieht die Punkte der geraden Linie nicht auf einen einzigen Punkt, sondern auf zwei Punkte, die Endpunkte (A und B) einer geraden Strecke AB derselben (Fig. 1). Die übrigen Punkte der geraden Linie werden als Theilpunkte der Geraden AB betrachtet, welche dieselbe je in zwei Abschnitte theilen. Ist ein Theilpunkt, wie C, ein innerer, so sind auch die Abschnitte innere, und es ist ihre Summme

*) Wie selbst ganz mit Vermeidung des Maassbegriffes das Reich des Raumes und seiner Gestalten erforscht werden kann, hat Professor v. Staudt in seiner Geometrie der Lage gezeigt.

$AC + BC = AB$; ist aber ein Theilpunkt ein äusserer, wie C', so betrachtet man doch die Stücke zwischen ihm und den Endpunkten der Geraden AB als seine Abschnitte, sie sind desshalb verschiedener Natur: der grössere BC' ist ein übergreifender, der andere AC' ist ein äusserer, und es ist ihre Differenz $BC' - AC' = AB$. Das Verhältniss der zwei Abschnitte eines Theilpunktes ist es nun, was zur Bestimmung seiner Lage gebraucht wird, und desswegen heisst dasselbe »der Modulus des Theilpunktes.« Man wird nun wohl sogleich bemerken, dass schon in dem Begriff des Modulus eine Zweideutigkeit liegt, da nach demselben der Modulus eines Theilpunktes C sowohl durch das Verhältniss $AC : BC$, als auch durch das Verhältniss $BC : AC$ ausgedrückt ist. Diese Zweideutigkeit wird jedoch dadurch hinweggeräumt, dass man die Stellung des Abschnitts im Modulus mit seiner Lage auf der Geraden AB in Uebereinstimmung bringt, indem in jedem Modulus das vordere Glied nur einen Abschnitt an einem und demselben Endpunkte (A) und das Hinterglied nur einen Abschnitt an dem andern Endpunkte (B) der Geraden AB bezeichnet. Um daher die Uebereinstimmung in der Lage der Abschnitte zweier Theilpunkte mit ihrer Stellung in den Modulus auszudrücken, sagt man, die Modulus zweier Theilpunkte seien gleich geordnet, wenn die Vorderglieder der Modulus an dem einen Endpunkte und die Hinterglieder derselben an dem andern Endpunkte der Geraden AB liegen.

Ist aber auf diese Weise die Zweideutigkeit im Begriff des Modulus beseitigt, so überzeugt man sich bald, dass zwischen gleichartigen Punkten die Lage eines Punktes durch den Modulus vollkommen bestimmt ist. Sind z. B. C und D zwei innere Punkte der Geraden AB, und ist

$$AC > AD,$$

so folgt $AB - AC < AB - AD$, d. i. $BC < BD$,

folglich auch $\frac{AC}{BC} > \frac{AD}{BD}$.

Man sieht hieraus, dass die Vorderglieder der Modulus wachsen und die Hinterglieder abnehmen mit dem, dass der Theilpunkt in der Richtung von A nach B sich bewegt. In dem

Endpunkt A der Geraden ist das Vorderglied des Modulus und damit auch der Werth des Modulus selbst gleich Null; im andern Endpunkt B wird das Hinterglied des Modulus gleich Null und der Werth des Modulus wird selbst unendlich. Wenn also der Theilpunkt sich von A nach B fortbewegt, so durchläuft der Modulus desselben in stetigem Wachsthum alle Werthe von Null bis Unendlich. In der Mitte O der Geraden AB erreicht der Modulus $\frac{AO}{OB}$ die Grösse Eins.

Ganz ähnlich verhalten sich auch die äusseren Punkte. Weil der übergreifende Abschnitt eines Theilpunktes immer grösser ist als der äussere, so muss der Modulus eines Theilpunktes auf der rückgängigen Verlängerung der Geraden AB kleiner sein als Eins, während er auf der andern, vorwärtsschreitenden Verlängerung (von A nach B) grösser ist als Eins. Vergleicht man aber die Modulus zweier äussern Theilpunkte E' und F' derselben Verlängerung, so bemerkt man, dass beide Abschnitte des entfernteren Theilpunktes E¹ um dieselbe Grösse F'E' grösser sind, als die Abschnitte des näher liegenden Punktes F'. Nun ist aber der Modulus eines Theilpunktes der Form nach ein Bruch, und aus der Bruchlehre ist bekannt, dass der Werth eines Bruches verändert wird, sobald man Zähler und Nenner desselben um gleiche Grössen verändert, und zwar verändert sich die Grösse des Bruches bei gleicher Vermehrung des Zählers und Nenners so, dass sowohl der ächte als auch unächte Bruch sich dem Werthe Eins nähern, welchen Werth sie übrigens jedoch erst erreichen, wenn die Grösse, um welche Zähler und Nenner zugenommen haben, unendlich geworden ist. Hieraus folgt für die äusseren Theilpunkte, dass es nicht zwei äussere Punkte gibt, die denselben Modulus haben, und dass also die Lage eines äusseren Punktes durch den Modulus bestimmt ist; ferner folgt, dass auf der rückgängigen Verlängerung (AD'C') der Geraden AB, auf welcher die Modulus der Theilpunkte kleiner als Eins sind, ein Wachsthum des Modulus mit der Entfernung des Theilpunktes erfolgt, und dass der Modulus hier der Grenze Eins sich nähert, dieselbe aber erst

erreicht, wenn die Entfernung des Theilpunktes unendlich gross geworden ist. Auf der andern vorwärtsschreitenden Verlängerung (BF′E′), auf welcher der Modulus eines Theilpunktes grösser als Eins ist, ist mit der Entfernung des Theilpunktes ein Abnehmen des Modulus verbunden, wodurch der Modulus der Grenze Eins sich immer mehr nähert, diese Grenze aber auch erst bei einer unendlichen Entfernung erreicht. Es erreicht somit auch der Modulus der äusseren Theilpunkte in den Endpunkten A und B seine Grenzwerthe Null und Unendlich, dagegen bieten die unendlich entfernten Punkte der beiderseitigen Verlängerungen den Mittelwerth der Zahl Eins dar.

Die gleichartigen Theilpunkte zerfallen in Paare, die durch ihre Lage und durch ihre Modulus ausgezeichnet sind. In Betreff ihrer Lage heissen zwei gleichartige Punkte, wie C und $\mathfrak{C}$, symmetrisch (Fig. 2), wenn ihre Entfernungen von den Endpunkten ($A\mathfrak{C} = BC$, $AC = B\mathfrak{C}$) gleich sind. Ebenso sind auch die äusseren Punkte C′ und $\mathfrak{C}'$ symmetrisch, wenn $A\mathfrak{C}' = BC'$ und $AC' = B\mathfrak{C}'$. Aus der symmetrischen Lage der Punkte C und $\mathfrak{C}$, C′ und $\mathfrak{C}'$ folgt aber unmittelbar, dass

$$\frac{AC}{BC} = \frac{B\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} = 1 : \frac{A\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}}$$
$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{B\mathfrak{C}'}{A\mathfrak{C}'} = 1 : \frac{A\mathfrak{C}'}{B\mathfrak{C}'}$$

Die Modulus zweier symmetrischen Punkte haben also eine solche Grösse, dass der Modulus des einen Punktes die reciproke Zahl des andern ist. Zwei innere symmetrische Punkte nähern sich einander immer mehr mit ihrer Entfernung von den Endpunkten der Geraden AB, in der Mitte der Geraden fallen sie endlich zusammen. Die Mitte O der Geraden erscheint also als der Ort der Geraden, in welchem die zwei symmetrischen Punkte auf einander fallen; wie auch die Zahl Eins, der Modulus der Mitte, ihrer reciproken Zahl gleich ist; in dieser Mitte wird der Uebergang von den Theilpunkten der Hälfte (AO), deren Modulus ächte Brüche sind, zu den Theilpunkten der andern Hälfte (BO), deren Modulus unächte Brüche sind, vermittelt.

Zwei äussere symmetrische Punkte entfernen sich, mit ihrer

Entfernung von den Endpunkten der Geraden AB, zugleich auch immer mehr von einander; endlich treten sie beide zugleich in eine unendliche Entfernung zu einander und zu den Endpunkten der Geraden. Diese unendlich entfernten symmetrischen Punkte vermitteln ebenfalls die zwei Verlängerungen, deren eine durch die ächten Bruchwerthe ihrer Modulus und die andere durch die unächten Bruchwerthe ihrer Modulus ausgezeichnet ist. In Hinsicht auf die Modulus der Theilpunkte ist man daher veranlasst, diese unendlich entfernten Punkte als identische Punkte der Verlängerungen der Geraden AB zu betrachten. Wir denken uns also die Bewegung eines äusseren Punktes so, dass er zuerst, von A ausgehend, auf der rückgängigen Verlängerung bis in unendliche Entfernung sich bewegt und die Hälfte zurücklegt, welche durch ächte Bruchwerthe ihrer Modulus ausgezeichnet ist, dann von der andern Seite her, aus der unendlichen Entfernung gegen B hin in gleicher Richtung sich bewegt, bis er, in B angekommen, das andere Ende der Geraden erreicht. Durch diese Identificirung der unendlich entfernten symmetrischen Punkte, in der Reihenfolge der Punkte einer Geraden AB (Fig. 1) ist man berechtigt, die äussersten Punkte einer Reihe, wie E′ und C′ ebenso gut, als die Punkte, wie F′ und E′ auf einander folgende zu heissen, indem ein Theilpunkt, der in der Richtung von F′ nach E′ sich bewegt, seinem Modulus conform, von C′ zuerst nach E′ gelangt, ehe er zu den Punkten zwischen E′ und F′ kommen kann. — Diese Anschauung, die Punkte der unendlichen Entfernung als identische zu betrachten, könnte wohl fremdartig scheinen, allein da die Lagen der Punkte nur nach ihrem Modulus zu bemessen sind, so ist man durchaus hiezu aufgefordert, und wird auch später noch von anderer Seite her zur Festhaltung dieser Vorstellung veranlasst werden.

Hiemit möchte die Bestimmung der Punkte einer Geraden vermittelst der Modulus gehörig charakterisirt sein, und es mag nur noch eine Bemerkung der Vergleichung mit der analytischen Methode hinzugefügt werden. Dort in der analytischen Geometrie ist die Lage des Theilpunktes durch das Maass seiner Entfernung von einem gegebenen Punkte, nicht für sich

allein bestimmt; es ist auch die Richtung, in welcher der Punkt zu suchen ist, noch durch ein Plus- oder Minus-Zeichen zu vervollständigen. Hier, in der neueren Geometrie, wo die Lage des Theilpunktes durch den Modulus im Verhältniss zu den Endpunkten einer geraden Strecke AB bestimmt wird, ist ebenfalls noch etwas nothwendig, weil derselbe Modulus ebenso gut einen äusseren als einen inneren Punkt bezeichnen kann. Von dieser Seite aus betrachtet, könnte es scheinen, als ob durch die Einführung des Modulus nichts gewonnen sei; allein hierauf ist zu erwiedern, dass die neuere Geometrie die Modulus nicht dazu gebraucht, um die Lage eines Punktes für sich zu bestimmen; vielmehr ist das Wesentliche der neueren Geometrie eben das, dass sie überhaupt die Lage der Raumgrössen nicht durch Zahlformen, sondern wieder durch andere Raumgrössen bestimmt, und in dem vorliegenden Fall, da nur die Punkte der geraden Linie betrachtet werden sollen, bestimmt sie die Lage eines Punktes durch die Lage eines andern bekannten Punktes, und die Modulus sind nur das einfache Mittel, wodurch diese Beziehung vollzogen wird. Hievon werden die folgenden Abschnitte den Beweis liefern.

B. Harmonische Theilung einer Geraden.

§. 6. Wenn auf der Richtung einer geraden Strecke zwei Theilpunkte so liegen, dass ihre gleichgeordneten Modulus einander gleich sind, so sagt man, sie theilen die Gerade harmonisch. Zwei Punkte, welche eine gegebene Gerade harmonisch theilen, heissen einander zugeordnet.

Zwei einander zugeordnete Punkte der harmonischen Theilung haben eine ungleichartige Lage; der eine ist ein äusserer, wenn der andere ein innerer ist, dabei ist durch die Lage eines gegebenen Theilpunktes die Lage des zugeordneten Punktes der harmonischen Theilung vollkommen bestimmt. Es gibt zu jedem inneren Punkte nur einen einzigen äusseren, und zu einem äusseren nur einen einzigen inneren, der ihm harmonisch zugeordnet wäre.

§. 7. Liegt ein Theilpunkt der harmonischen Theilung in der Mitte der gegebenen Geraden, so liegt sein zugeordneter Theilpunkt in unendlicher Entfernung. Bewegt sich ein innerer Theilpunkt von dem einen Ende der Geraden zum andern, so bewegt sich der harmonisch zugeordnete

Theilpunkt von demselben Endpunkte der Geraden ausgehend in entgegengesetzter Richtung auf der an diesem Endpunkte angrenzenden Verlängerung bis in unendliche Entfernung, und sodann von der unendlichen Entfernung der anderen Verlängerung gegen das andere Ende der Geraden, wo er zugleich mit dem inneren Theilpunkte ankommt.

Liegt ein äusserer Punkt in unendlicher Entfernung, so ist sein harmonisch zugeordneter Theilpunkt in der Mitte der Geraden. Bewegt sich ein äusserer Punkt von einem Ende aus auf der Verlängerung fort in's Unendliche, kommt dann von der unendlichen Entfernung auf der andern Verlängerung wieder gegen den andern Endpunkt der Geraden, so bewegt sich sein harmonisch zugeordneter Theilpunkt in stetem Zug von demselben Endpunkte der Geraden aus in entgegengesetzter Richtung, und gelangt mit dem äussern zugleich im andern Endpunkte der Geraden an.

§. 8. Zwei zugeordnete Theilpunkte der harmonischen Theilung einer gegebenen Geraden haben eine beachtenswerthe Beziehung zu der Mitte der Geraden:

a) die Hälfte der Geraden ist das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten, welche zwischen der Mitte der Geraden und den zugeordneten Theilpunkten der harmonischen Theilung liegen.

b) Das Produkt der zwei Abschnitte, in welche die Gerade durch einen der Theilpunkte getheilt wird, ist gleich dem Produkt der Abschnitte, in welche der gleiche Theilpunkt das Stück theilt, das zwischen der Mitte der Geraden und dem andern Theilpunkte liegt.

Umgekehrt: haben vier Punkte, welche auf einer Geraden liegen, eine solche Lage gegen die Mitte des Stückes, das zwischen zwei nicht auf einander folgenden Punkten liegt, wie es in den Sätzen a und b ausgesprochen ist, so theilen sie die Gerade harmonisch.

§. 9. Die harmonische Theilung schliesst eine Gegenseitigkeit ein. Theilen nämlich zwei Punkte eine begrenzte Gerade harmonisch, so wird auch das zwischen diesen Punkten liegende Stück der Geraden durch die Endpunkte der Geraden harmonisch getheilt. Diese Gegenseitigkeit macht die Unterscheidung der Endpunkte der Geraden gegenüber der Theilpunkte ihrer harmonischen Theilung überflüssig, und man sagt daher von vier harmonischen Punkten, dass jedes Paar nicht auf einander folgender Punkte durch das andere Paar harmonisch getrennt sei.

Die Uebereinstimmung zwischen den Modulus der inneren und denen der äusseren Theilpunkte einer Geraden, die wir im vorausgehenden Abschnitte kennen lernten, zeigt, dass zu

jedem inneren Theilpunkte ein anderer äusserer vorhanden ist, der den gleichen Modulus hat wie jener; solche zwei Theilpunkte einer Geraden nun, deren Modulus einander gleich sind, heissen zugeordnete Punkte der harmonischen Theilung. Weil man nun überdiess aus §. 3. weiss, dass unter gleichartigen Punkten nicht zwei vorhanden sind, deren gleichgeordnete Modulus einander gleich wären, so schliesst man, dass von zwei zugeordneten Theilpunkten der eine ein innerer und der andere ein äusserer sein muss, und dass zu jedem Theilpunkt auch immer nur ein einziger zugeordneter Theilpunkt der harmonischen Theilung existirt. Es ist also durch jeden auf der Geraden AB gegebenen Punkt der zugeordnete harmonische Punkt vollkommen bestimmt. Dieser besondere Fall der harmonischen Theilung, zu der man durch die Modulus der Theilpunkte wie von selbst geführt wurde, liefert ein Beispiel, wie die neuere Geometrie die Lage eines Punktes, nicht durch eine blosse Zahl, wie die analytische Geometrie es thut, sondern durch die Lage eines anders Punktes zu bestimmen im Stande ist. Die Methode der neueren Geometrie gewinnt dadurch den grossen Vortheil, dass sie den Boden des Raumes nicht zu verlassen nöthig hat und dass sie die Lage aller Punkte ohne Hülfe von positiven und negativen Grössen bestimmen kann. Wie naturgemäss diese Methode ist, das wird sich übrigens erst in der Folge herausstellen, wenn sich zeigen wird, auf welche einfache Weise die sonst so verwickelten Eigenschaften der Figuren sich entwickeln lassen.

Die Uebereinstimmung in der Lage der zugeordneten harmonischen Theilpunkte einer Geraden ergibt sich so unmittelbar aus dem, was in §. 4. des vorigen Abschnitts gesagt ist, dass es kaum nöthig scheint, noch Weiteres zur Erklärung hinzuzufügen. Ist ja dort schon ausgesprochen, dass die inneren und äusseren Theilpunkte, welche mit den Endpunkten der Geraden zusammenfallen, dass ferner die Mitte der Geraden und die äusseren Punkte des unendlichen Raumes gleiche Modulus haben, so ist hiemit schon gesagt, dass diese Punkte die Gerade harmonisch theilen und dass die übrigen Punkte zwischen die-

sen Punkten der extremen Lage ebenfalls einander paarweise harmonisch zugeordnet sein müssen. Dagegen ist auf einige andere Beziehungen der harmonisch zugeordneten Punkte zu der Mitte O der Geraden AB aufmerksam zu machen.

Bezeichnet man zu dem Ende (Fig. 2) $AO = BO = \frac{1}{2} AB$ mit r, und die Abschnitte OC und OC′ der harmonisch zugeordneten Punkte C und C′ mit γ und γ', so ist $BC = r + \gamma$, $AC = r - \gamma$, $BC' = \gamma' + r$; $AC' = \gamma' - r$ folglich

$$BC : AC = BC' : AC' \quad (\S.\ 6.)$$

oder $r + \gamma : r - \gamma = \gamma' + r : \gamma' - r$

woraus durch Reduktion

$$r^2 = \gamma\gamma'$$

oder $OA^2 = OC \,.\, OC'$; $OC : OA = OA : OC'$.

Die Hälfte OA der Geraden AB ist also das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten OC und OC′, welche zwischen der Mitte O und den harmonisch zugeordneten Theilpunkten C und C′ liegen.

Zieht man aber von der Gleichung $r^2 = \gamma\gamma'$ beiderseits die Grösse γ^2 ab, so findet man:

$$r^2 - \gamma^2 = \gamma\gamma^1 - \gamma^2 \text{ oder } (r + \gamma) . (r - \gamma) = \gamma\,(\gamma^1 - \gamma)$$

d. i. $AC \,.\, BC = OC \,.\, CC'$.

Die Abschnitte AC und BC des Theilpunktes C bilden also ein Produkt, welches dem Produkt der Abschnitte gleich ist, in welche OC′ durch denselben Punkt C getheilt wird.

Es ist noch zu bemerken, dass, wenn zwei Punkte C und C′ eine Gerade AB harmonisch theilen und daher $AC : BC = AC' : BC'$ ist, auch durch Verwechslung der mittleren Glieder folgt, dass

$$AC : AC' = BC : BC'.$$

Nun ist aber das Verhältniss $AC : AC'$ der Modulus des Punktes A, welcher die Gerade CC′ theilt, und $BC : BC'$ ist der Modulus des Punktes B, welcher dieselbe Gerade CC′ theilt. Man sieht daraus, dass wenn die Punkte C und C′ die Gerade AB harmonisch theilen, auch das Stück CC′ von den Punkten A und B harmonisch getheilt wird. Diese Gegenseitigkeit in der harmonischen Theilung macht die Unterscheidung der Theilpunkte gegenüber den Endpunkten der Geraden, welche sie

theilen, überflüssig. Sobald also zwischen vier Punkten eine der oben angeführten Proportionen Statt findet, so sagt man: die Punkte A und B werden durch die Punkte C und C′ harmonisch getrennt, und umgekehrt.

C. Anharmonische Theilung einer Geraden.

§. 10. Wenn auf einer geraden Strecke zwei Theilpunkte so liegen, dass ihre gleichgeordneten Modulus einander nicht gleich sind, so sagt man, dass sie die Gerade anharmonisch theilen. Das Verhältniss der gleichgeordneten Modulus zweier Theilpunkte heisst das Doppelverhältniss derselben.

Durch das Doppelverhältniss zweier Theilpunkte einer Geraden ist die Lage der Theilpunkte gegen einander bestimmt, sobald bekannt ist, ob die Punkte eine gleichartige oder eine ungleichartige Lage gegen die Gerade haben. Es existirt nämlich alsdann für einen gegebenen Theilpunkt der Geraden nur ein einziger zweiter, der mit ihm die bezeichnete gleichartige oder ungleichartige Lage hat und ein Doppelverhältniss von der gegebenen Grösse darbietet.

§. 11. Wenn mehrere Paare von Theilpunkten in gleicher Aufeinanderfolge mit den Endpunkten einer Geraden stehen und sie überdiess in einem und demselben gleichgeordneten Doppelverhältniss theilen, so sagt man, sie theilen die Gerade anharmonisch proportional, und das Doppelverhältniss selbst heisst Modulus der anharmonisch proportionalen Theilung und die Punkte jedes Paares der anharmonisch proportionalen Theilung der Geraden heissen einander zugeordnet.

Von den einander zugeordneten Punkten der anharmonisch proportionalen Theilung einer gegebenen Geraden sollen diejenigen, deren Modulus das vordere Glied der Doppelverhältnisse ausmachen, Punkte der ersten Reihe heissen, und diejenigen, deren Modulus die hinteren Glieder der Doppelverhältnisse ausmachen, Punkte der zweiten Reihe.

Derjenige Punkt einer Reihe, welcher den unendlich entfernten Punkten der anderen Reihe zugeordnet ist, heisst Gegenpunkt.

§. 12. Zwischen den einander zugeordneten Punkten der anharmonisch proportionalen Theilung finden folgende Beziehungen Statt:

a) Wenn der eine Theilpunkt mit einem Endpunkt der Geraden zusammenfällt, so fällt auch der ihm zugeordnete Punkt mit demselben zusammen.

b) Die zwei Gegenpunkte der zwei Punktreihen der anharmonisch pro-

portionalen Theilung haben eine symmetrische Lage gegen die Gerade. Haben die Theilpunkte eine gleichartige Lage, so sind die Gegenpunkte äussere Punkte; haben sie eine ungleichartige Lage, so sind die Gegenpunkte innere Punkte. In beiden Fällen ist das Verhältniss der Abschnitte des Gegenpunkts der ersten Reihe der Punkte dem Modulus der anharmonisch proportionalen Theilung gleich und der Gegenpunkt der zweiten Reihe bildet zwei Abschnitte, deren Verhältniss dem reciproken Modulus der anharmonisch proportionalen Theilung gleich ist.

§. 13. Die harmonische Theilung einer Geraden ist ein besonderer Fall der anharmonisch proportionalen Theilung ungleichartiger Lage.

Der Unterschied, welcher zwischen ihnen Statt findet, ist folgender:

a) Das Doppelverhältniss der harmonischen Theilung ist gleich Eins, das Doppelverhältniss der anharmonischen Theilung ist grösser oder kleiner als Eins.

b) Wenn in der harmonischen Theilung ein Punkt der ersten Reihe mit einem Punkt der zweiten Reihe zusammenfällt, so fallen auch ihre zugeordneten harmonischen Punkte auf einander. Wenn dagegen in der anharmonisch proportionalen Theilung ein Punkt der ersten Reihe mit einem Punkt der zweiten Reihe zusammenfällt, so fallen ihre zugeordneten Punkte im Allgemeinen auseinander, nur in den Endpunkten der Geraden fallen diese Punkte auf einander.

Die anharmonische Theilung stimmt auch darin mit der harmonischen überein, dass sie an der Eigenschaft der Gegenseitigkeit Theil nimmt.

Beliebige vier Punkte einer Geraden sind daher anharmonische Punkte, von welchen je der vierte durch die drei übrigen bestimmt ist, wenn die Aufeinanderfolge der Punkte und eines der Doppelverhältnisse gegeben ist, welche zwischen den vier Punkten möglich sind.

Die harmonische Theilung zeigt uns in einem besondern Fall, wie nach der Methode der neueren Geometrie durch einen Punkt auf einer gegebenen Geraden die Lage eines andern Punktes bestimmt werden kann. Es führte die Vergleichung der Modulus der Theilpunkte unmittelbar zur harmonischen Theilung, wenn man zu einem gegebenen Punkte denjenigen zugeordneten aufsuchte, dessen Modulus dem des ersten gleich ist. Aber wenn auch zwei Theilpunkte C und C′ beliebig genommen werden und die Modulus derselben $\left(\frac{AC}{BC} \text{ und } \frac{AC'}{BC'}\right)$

einander nicht gleich sind, so kann doch auch die Lage des zweiten Punktes durch die des ersten bestimmt werden, sobald das Verhältniss der Modulus der zwei Theilpunkte zu einander gegeben und die Aufeinanderfolge der vier Punkte bekannt ist. Denn wenn die zwei Abschnitte der Theilpunkte C und C′ (Fig. 1), welche an dem Endpunkte A liegen, beziehungsweise mit a und a′, und die zwei Abschnitte am Endpunkte B mit b und b′ bezeichnet werden und der gegebene Werth des Doppelverhältnisses = q ist, so folgt aus

$$\frac{a}{b}:\frac{a'}{b'} = q, \text{ dass } \frac{a}{b} = q \cdot \frac{a'}{b'} \text{ und } \frac{a'}{b'} = \frac{1}{q} \cdot \frac{a}{b}.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn der Punkt C sein Modulus und deesen Verhältniss zum Modulus von C′ gegeben ist, auch der Modulus $\frac{a'}{b'}$ des Punktes C′ bestimmt ist. Weil jedoch zu jedem Modulus zwei Theilpunkte existiren, ein innerer und ein äusserer, wie diess die harmonische Theilung lehrt, so folgt, dass die Lage des Punktes C′ noch einer Zweideutigkeit unterworfen ist, welche erst gehoben wird, wenn bekannt ist, ob der Punkt C′ ein innerer oder ein äusserer ist. Wenn also ausser dem Doppelverhältniss der Punkte C und C′ noch die Aufeinanderfolge mit den Punkten A und B gegeben ist, so ist durch die Lage des einen Punktes die Lage des andern Punktes vollkommen bestimmt. Man sagt desshalb von zwei beliebigen Punkten C und C′, dass sie die Gerade AB anharmonisch theilen, und es ist die anharmonische Theilung durch den Werth des Doppelverhältnisses der Theilpunkte und durch die Angabe, ob die Punkte eine gleichartige Lage zu AB haben, bestimmt.

Sucht man nun aber zu den zwei Punkten C und C′ noch zwei andere D und D′, welche in derselben Aufeinanderfolge mit A und B stehen, wie die Punkte C und C′, und deren gleichgeordnetes Doppelverhältniss demjenigen der Punkte C und C′ gleich ist, so sagt man: die zwei Paare von Theilpunkten theilen die Gerade AB anharmonisch proportional, und die Punkte C und C′, sowie die Punkte D und D′, heissen einander zugeordnete Punkte der anharmonisch proportionalen Theilung.

Nun kann man zu jedem weiteren auf der Richtung von AB gegebenen Theilpunkte den zugeordneten Theilpunkt der anharmonisch proportionalen Theilung suchen, und man erhält auf solche Weise eine Menge von Paaren einander zugeordneter Punkte, die zwei Reihen zusammensetzen, nämlich die erste Reihe der Punkte, welche durch das vordere Glied des Doppelverhältnisses, das ihren Modulus angibt, bestimmt sind, und die zweite Reihe der Punkte, welche durch das hintere Glied des Doppelverhältnisses bestimmt sind.

Vor allem ist nun nöthig, ein bestimmtes Bild von der gegenseitigen Lage der zugeordneten Punkte der anharmonisch proportionalen Theilung zu gewinnen.

Ist die Lage der zugeordneten Punkte der anharmonisch proportionalen Theilung durch den Modulus $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = q$ gegeben, so fällt der Theilpunkt C mit dem Endpunkt A zusammen, wenn $a = o$ und desswegen auch $\frac{a}{b} = o$ ist, für diesen besondern Fall ist der Modulus

$$o : \frac{a'}{b'} = q$$

woraus $\frac{a'}{b'} = \frac{o}{q} = o$, und $a' = o$. Es fällt also jedesmal mit dem einen Theilpunkt C auch der andere C' zugleich mit dem Endpunkt A der Geraden AB zusammen. Das gleiche Resultat findet man, wenn man annimmt, dass C' mit A zusammenfalle, es fällt nämlich alsdann auch C mit eben dem Punkt A zusammen.

Fällt aber ein Theilpunkt der ersten Reihe etwa C, mit dem andern Endpunkt B, der Geraden AB zusammen, so ist $b = o$ und folglich:

$$\frac{a}{o} : \frac{a'}{b'} = q, \quad \frac{a}{o} = q \, \frac{a'}{b'}, \text{ also auch } \frac{o}{a} = \frac{b'}{a' . q}$$

woraus $b' = \frac{o}{a} . a' . q = o$,

das heisst, wenn der Theilungspunkt C mit dem Endpunkt B

zusammenfällt, so hat auch der zugeordnete Theilpunkt das gleiche Schicksal. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn ein Punkt C′ der zweiten Reihe betrachtet wird, der mit dem Endpunkt B zusammenfällt. Es folgt, dass zwei zugeordnete Theilpunkte immer zugleich mit einem Endpunkt der Geraden AB zusammenfallen.

Dieses Resultat, das folgerichtig sich ergab, ohne Rücksicht auf die Aufeinanderfolge der Theilpunkte mit den Endpunkten der Geraden AB muss auch für die zwei Fälle der gleichartigen und ungleichartigen Lage dieselbe Gültigkeit haben.

Es sollen nun die Punkte beider Reihen betrachtet werden, welche unendlich entfernte zugeordnete Punkte haben und welche man Gegenpunkte heisst.

Sind die Punkte C und C′ in gleichartiger Lage gegen AB und theilen dieselben anharmonisch proportional, und ist C′ unendlich entfernt (Fig. 3, b), so ist der Modulus des Theilpunktes C′= 1 (§. 3), und C wird zum Gegenpunkt Q der ersten Reihe, für welchen

$$\frac{a}{b} : 1 = q \quad \text{also} \quad \frac{a}{b} = q.$$

Ist aber C ein unendlich entfernter Punkt, so ist $\frac{a}{b} = 1$

also $\quad 1 : \frac{a'}{b'} = q,\ \frac{a'}{b'} = \frac{1}{q}$, und dieser Modulus $\frac{a'}{b'}$ bezeichnet die Lage des Gegenpunktes $\mathfrak{Q}'$ der zweiten Reihe.

Man sieht hieraus, dass der Gegenpunkt der ersten Reihe die Gerade AB so theilt, dass das Verhältniss der Abschnitte dem Modulus der anharmonisch proportionalen Theilung gleich ist. Der Gegenpunkt der zweiten theilt die Gerade AB so, dass das Verhältniss der Abschnitte dem reciproken Modulus der anharmonischen Theilung gleich ist. Die zwei Gegenpunkte Q und $\mathfrak{Q}'$ haben also eine symmetrische Lage gegen die Gerade AB (§. 4). Weil aber die zwei einander zugeordneten Punkte eine gleichartige Lage haben, so müssen auch die Gegenpunkte wie ihre unendlich entfernten zugeordneten Punkte äussere Punkte sein.

Wenn die zugeordneten Punkte ungleichartiger Lage sind, so ändert sich an der ganzen Schlussfolge nichts, nur müssen

alsdann die Gegenpunkte Q und 𝔔, innere Punkte sein, weil sie eine den unendlich entfernten Punkten ungleiche Lage haben (Fig. 3, a).

Die zwei Gegenpunkte zeigen, dass denselben Punkten, nämlich den Punkten der unendlichen Entfernung, je nachdem sie der ersten oder der zweiten Reihe angehören, verschiedene Punkte der anharmonisch proportionalen Theilung zugeordnet sind, und diese Eigenschaft kommt nicht nur den Punkten des unendlichen Raumes, sondern ausser den Endpunkten der Geraden AB überhaupt allen Punkten der ganzen Richtung AB zu.

Ist nämlich AB irgend eine nach dem Modulus q anharmonisch proportional getheilte Gerade, und ist C ein beliebiger Punkt auf ihr, der für sich durch den Modulus $\frac{a}{b}$ bestimmt ist, so wird man den Modulus des zugehörigen Punktes C′ der anharmonisch proportionalen Theilung leicht berechnen, und zwar wird, wenn C ein Punkt der ersten Reihe ist, der Modulus $\frac{x}{y}$ des zugehörigen Punktes gefunden durch die Gleichung $\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = q$. Es ist $\frac{x}{y} = \frac{a}{bq}$

Wenn aber an demselben Ort C ein Punkt der zweiten Reihe ist, so wird der Modulus $\frac{v}{w}$ des zugehörigen Punktes der ersten Reihe gefunden durch die Gleichung $\frac{v}{w} : \frac{a}{b} = q$, woraus $\frac{v}{w} = \frac{a\,q}{b}$

Man sieht hieraus, dass dem Punkt C zwei verschiedene Punkte zugeordnet sind, je nachdem in ihm ein Punkt der ersten Reihe oder ein Punkt der zweiten Reihe liegt. Die obigen Werthe für die Modulus der zugeordneten Punkte $\frac{x}{y}$ und $\frac{v}{w}$, werden nur in einem Falle einander gleich, wenn der Modulus q der anharmonischen Theilung selbst gleich Eins ist. Für diesen Fall, wo

$$\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = 1, \text{ ist aber } \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Es ist also in diesem letzteren Falle die anharmonisch proportionale Theilung in Wirklichkeit eine harmonische Theilung. Es folgt hieraus, dass zweien Punkten der zwei Reihen der anharmonisch proportionalen Theilung, welche in einem Punkt vereinigt sind, zwei ausser einander liegende Punkte zugeordnet sind, dass dagegen in der harmonischen Theilung diess anders sich verhält, indem dort zweien aufeinander liegenden Punkten der zwei Reihen wieder zwei aufeinander liegende Punkte zugeordnet sind. Diese Uebereinstimmung der zwei Punkte der zwei Reihen macht, dass die Unterscheidung der Reihen bei der harmonischen Theilung erst möglich wird, wenn man sie als einen besonderen Fall der anharmonischen Theilung kennen gelernt hat.

Nachdem wir nun die Beziehungen zwischen den zugeordneten Punkten unter einander untersucht haben, bleibt noch übrig, ihre Beziehungen zu den Endpunkten selbst in's Auge zu fassen. Nun kann aber das Doppelverhältniss $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = q$ ohne dass sein Werth verändert würde, auf die Form $\frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} = q$ gebracht werden. Das Glied $\frac{a}{a'}$ oder $\frac{AC}{AC'}$ ist aber der einfache Modulus des Punktes A, sofern er die Gerade CC' theilt, und das Glied $\frac{b}{b'}$ oder $\frac{BC}{BC'}$, ist der einfache Modulus des Punktes B, sofern er dieselbe Gerade CC' theilt, folglich ist $\frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} = q$ das Doppelverhältniss der Punkte A und B, sofern sie die Gerade CC' theilen. Man sieht daraus, dass auch das Doppelverhältniss zweier Theilpunkte, welche eine gegebene Gerade theilen, dieselbe Gegenseitigkeit darbietet, wie man diess bei der harmonischen Theilung bemerkt hat. Auch wird man leicht einsehen, wenn C und C' gegen AB eine gleichartige Lage haben, etwa innere Punkte von AB sind, dass die Punkte A und B äussere Punkte von CC' sind und daher auch eine gleichartige Lage gegen CC' haben. Zum gleichen Schluss gelangt man, wenn die Punkte C und C' eine ungleichartige

Lage gegen AB haben, dann haben auch A und B eine ungleichartige gegen CC′; kurz, das Stück CC′ wird in Betreff der Aufeinanderfolge und des Doppelverhältnisses ebenso von den Punkten A und B getheilt, wie das Stück AB von den Punkten C und C′.

D. Proportionale Umhüllung.

§. 15. Die anharmonisch proportionale Theilung einer Strecke geht in die einfach proportionale Umhüllung über, wenn ein Endpunkt der Strecke in unendliche Entfernung hinausrückt und nur noch der andere Punkt als ihr Anfangspunkt im endlichen Raume ist.

In der einfach proportionalen Umhüllung liegen die zugeordneten Punkte entweder auf der gleichen Seite des Anfangspunktes, indem sie gleichartiger Lage sind; oder sie liegen auf den entgegengesetzten Seiten des Anfangspunktes, indem sie ungleichartiger Lage sind; in beiden Fällen aber verwandelt sich der Modulus der anharmonischen Theilung hier in das Verhältniss der Abschnitte zwischen den zugeordneten Punkten und dem Anfangspunkte, welches also constant ist. Die Abschnitte der ersten Reihe sind den entsprechenden Abschnitten der zweiten Reihe proportional.

Die Gegenpunkte der einfach proportionalen Umhüllung liegen beide im unendlichen Raum.

§. 16. In dem besondern Falle der einfach proportionalen Umhüllung, wo das Verhältniss der zugeordneten Punkte der Zahl Eins gleich wird, liegen die zugeordneten Punkte in gleicher Entfernung vom Anfangspunkte. Diesen Fall kann man daher die uniforme Umhüllung nennen.

Wenn gefragt wird, ob die anharmonisch proportionale Theilung einer Geraden auch specifisch verschiedene Gattungen in sich schliesse so wird zu antworten sein, dass diess der Fall sein wird, wenn entweder der Werth des Modulus der Theilung, oder die Grösse der getheilten Linien einen specifischen Werth annehmen. Das Erste geschieht, wenn das Doppelverhältniss den Werth Eins annimmt, und diess führt zur harmonischen Theilung. Die Grösse einer Geraden gewährt keinen andern specifischen Werth als die extremen Werthe von Null und Unendlich. Der Werth Null ist in dem vorliegenden Falle nicht zulässig, der andere muss dahin beschränkt

werden, dass ein Endpunkt der unendlichen Geraden im endlichen Raum liege, und dieser im endlichen Raum liegende Punkt kann füglich Anfangspunkt genannt werden. Der Modulus der anharmonischen Theilung $\frac{a}{b}:\frac{a'}{b'}=q$ nimmt in diesem besondern Fall die Gestalt $\frac{a}{\infty}:\frac{a'}{\infty}=q$ oder $\frac{a}{a'}=q$ an. Das Doppelverhältniss zweier zugeordneten Punkte verwandelt sich daher in das einfache Verhältniss ihrer Abschnitte und die anharmonisch proportionale Theilung in die proportionale Umhüllung. Haben die zugeordneten Punkte C und C' eine gleichartige Lage, so erscheinen sie jetzt wie in Fig. 4, a auf der gleichen Seite des Anfangspunktes A, haben sie eine ungleichartige Lage, so erscheinen sie wie in Fig. 4, b auf verschiedenen Seiten von A; in beiden Fällen nähern sie sich einander um so mehr, je näher sie dem Punkt A rücken und die Punkte der einen Reihe liegen dem Punkt A näher als die zugeordneten der zweiten Reihe; in dem Punkt A fallen sie auf einander.

Was wird aber aus den Gegenpunkten? Ist Punkt Q' der zweiten Reihe unendlich weit von A entfernt, so muss auch sein zugeordneter Punkt Q, d. h. der Gegenpunkt der ersten Reihe, in unendlicher Entfernung liegen, da jetzt $\frac{AQ}{AQ'}=q$ in $\frac{AQ}{\infty}=q$ übergeht und also $AQ=q.\infty=\infty$ ist; wenn q einen endlichen Werth hat, wie das vorausgesetzt ist. Ebenso verwandelt sich, wenn ein Punkt der ersten Reihe Q in unendlicher Entfernung liegt, das Verhältniss $\frac{AQ'}{AQ}=q$ in das Verhältniss $\frac{\infty}{AQ'}=q$, woraus $AQ'=\frac{\infty}{q}=\infty$ sich ergibt.

Es fallen also die zwei Gegenpunkte der einfach proportionalen Theilung zugleich in den unendlichen Raum.

Endlich gewährt die proportionale Umhüllung noch den besondern Fall, dass der Modulus ihrer zugeordneten Theilpunkte gleich Eins wird. In diesem Fall sind die Abschnitte

zweier zugeordneten Theilpunkte einander gleich. Bei einer gleichartigen Lage decken sich also je zwei homologe Theilpunkte, und bei einer ungleichartigen Lage liegt der Anfangspunkt in der Mitte zwischen zwei homologen Punkten. Dieser letzte Fall lässt allein etwas für sich Bestehendes übrig und ist das, was man uniforme Umhüllung heisst.

E. Conforme Punktereihen.

§. 17. Auch auf zwei verschiedenen Geraden können die Punkte, wenn sie mit gleichen Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden, so auf einander bezogen werden, dass durch einen Punkt der einen Geraden ein homologer Punkt der andern Geraden bestimmt ist. Das Mittel dieser Beziehung ist auch hier die gleiche Aufeinanderfolge der Punkte und die Gleichheit der Doppelverhältnisse der homologen Abschnitte, die zwischen homologen Punkten liegen. Eine solche Beziehung der Punkte zweier Geraden erfordert aber zum Mindesten vier Paare von Punkten, denn bei drei Paaren von Punkten ist selbst nicht einmal das Mittel der gleichen Aufeinanderfolge anwendbar, indem drei Punkte, wie sie auch versetzt werden mögen, doch stets in gleicher Aufeinanderfolge stehen, wenn gleich die Richtung, in welcher diese Aufeinanderfolge geschieht, verschieden ist. Bei vier Paaren von Punkten ist aber diese Beziehung eine vollkommen bestimmte, wie solches aus folgendem Satz hervorgeht.

Sind vier Punkte einer Geraden in gleicher Aufeinanderfolge mit vier homologen Punkten einer andern Geraden, und theilen zwei homologe Paare dieser Punkte die Abschnitte, welche zwischen den zwei übrigen Punkten liegen, in gleichem Doppelverhältniss, so werden auch je zwei andere homologe Abschnitte von den zwei übrigen homologen Punktepaaren in gleichem Doppelverhältnisse getheilt, so dass überhaupt alle einander entsprechenden Doppelverhältnisse der vier Punktepaaren einander gleich sind. Diese zwei Reihen heissen conform.

Diese Beziehungen zwischen den Punkten zweier Geraden können auch auf eine grössere und selbst unbegrenzte Zahl von Punkten ausgedehnt werden.

Sind nämlich drei Paare von Punkten auf zwei Geraden gegeben, und fügt man zu denselben noch zwei andere Paare hinzu, von welchen jedes mit den gegebenen drei Paaren zwei conforme Reihen bildet, so sind überhaupt je vier Punkte der einen Linie den vier homologen Punkten der andern Linie conform.

Man wird also auf diese Weise Reihen von einer unbegrenzten Zahl von Punkten auffinden können, von welchen je vier Punkte der einen Reihe mit den vier homologen Punkten der andern Reihe in conformer Lage sich befinden, und solche Punktereihen heissen conform (⊼).

Es folgt aber aus dem Begriff der Conformität solcher Reihen, dass dieselbe durch drei Paare von Punkten vollkommen bestimmt sind, so dass, wenn drei Paare von Punkten auf zwei Geraden gegeben sind, zu jedem Punkt der einen Geraden nur ein einziger homologer Punkt der andern Geraden existirt. Es folgt ferner, dass, wenn unter den Punkten der einen Reihe vier harmonische Punkte sich befinden, auch die homologen Punkte jeder conformen Reihe harmonisch sind, und umgekehrt bilden vier Paare von harmonischen Punkten stets zwei conforme Reihen.

Endlich folgt noch aus dem Begriff der Conformität, dass zwei Reihen, welche einer dritten Reihe conform sind, auch unter sich conform sind.

§. 18. Conforme Punktereihen lassen folgende besondere Fälle unterscheiden:

a) Wenn die zwei unendlich entfernten Punkte zweier conformen Reihen homolog sind, so theilen die übrigen Punkte die Geraden, auf denen sie liegen, in proportionale Abschnitte.

Umgekehrt. Punktereihen, welche die Geraden, auf denen sie liegen, in proportionale Abschnitte theilen, sind conform, und es sind auch ihre Punkte des unendlichen Raumes homolog.

b) Wenn zwei Gerade durch zwei Punktereihen so getheilt werden, dass alle homologen Abschnitte einander gleich sind, so sind sie ebenfalls conform und bilden den besondern Fall der uniformen Reihen.

§. 19. Unter den Punkten zweier conformen Reihen ist derjenige jeder Reihe von besonderer Bedeutung, welcher dem unendlich entfernten Punkte der anderen Reihe homolog ist, er heisst Gegenpunkt.

Jeder Gegenpunkt theilt die Gerade, auf der er liegt, in zwei Aeste, deren jeder nach einer Seite hin in den unendlichen Raum verlauft. Bewegt sich nun auf der einen Geraden ein Punkt aus der unendlichen Entfernung her durch den Gegenpunkt der Geraden hindurch, bis er wieder auf der andern Seite in's Unendliche sich verliert, so bewegt sich auf der andern conformen Geraden der homologe Punkt von seinem Gegenpunkt aus auf dem einen Aste hin in's Unendliche, wo er ankommt, wenn der erste Punkt in seinem Gegenpunkt steht, und hier-

auf erscheint er auf dem andern Aste, wo er aus der unendlichen Ferne her seinem Gegenpunkt sich nähert, welchen er erreicht, sobald sein homologer Punkt wieder das unendlich entfernte Ende seines zweiten Astes erreicht hat, so dass sich die zwei Aeste der zwei Geraden in umgekehrtem Sinne entsprechen.

Die Lage der homologen Punkte gegen ihre Gegenpunkte ist einem sehr einfachen Gesetze unterworfen, denn es sind die Abschnitte zweier conformen Punktereihen, welche zwischen den homologen Punkten und den Gegenpunkten liegen, umgekehrt proportional, oder mit anderen Worten, es ist das Rechteck aus den Abschnitten constant, welches zwischen zwei homologen Punkten und den Gegenpunkten ihrer Richtungen liegt.

§. 20. Ein besonders zu beachtender Fall tritt ein, wenn zwei conforme Punktereihen in einer geraden Richtung vereinigt sind. Solche Reihen heissen einstimmig conform, wenn die Punkte der zwei Reihen in gleicher Richtung auf einander folgen, sie heissen entgegengesetzt conform, wenn ihre Aufeinanderfolge in entgegengesetzter Richtung geschieht.

Bei den einstimmig conformen Reihen liegen je zwei homologe Punkte stets auf den Aesten entgegengesetzter Lage, bei den entgegengesetzt conformen Reihen liegen sie dagegen auf den Aesten gleicher Lage.

Unter den homologen Punkten zweier in einer Richtung vereinigter Punktereihen gibt es auch solche, die paarweise zusammenfallen, und solche Punkte ihrer gemeinschaftlichen Richtung, in welchen zwei homologe Punkte der conformen Reihen in einem Ort vereinigt sind, heissen Hauptpunkte. Hinsichtlich dieser Hauptpunkte ist noch Folgendes zu bemerken:

a) Zwei in einer Richtung vereinigte Reihen können höchstens zwei Hauptpunkte haben; wenn in mehr als zwei Orten homologe Punkte der conformen Reihen vereinigt sind, so fallen die conformen Punktereihen überhaupt mit allen ihren homologen Punkten auf einander.

b) Die einstimmig conformen Reihen haben entweder zwei Hauptpunkte, die zwischen den Gegenpunkten symmetrisch liegen, oder sie haben nur einen Hauptpunkt in der Mitte zwischen den zwei Gegenpunkten, oder aber sie haben gar keinen Hauptpunkt, so dass nirgends zwei homologe Punkte in einem Ort zusammentreffen. Sollten die Gegenpunkte selbst auf einander fallen, so haben sie keine Hauptpunkte.

c) Die entgegengesetzt conformen Reihen einer Geraden haben stets zwei Hauptpunkte, welche ausserhalb der durch die Gegenpunkte begrenzten Strecke, und zwar ebenfalls symmetrisch gegen dieselbe liegen.

Sollten die Gegenpunkte selbst auf einander fallen, so ist ihr Ort in der Mitte zwischen den Hauptpunkten.

d) So oft zwei in einer Geraden vereinigte conforme Reihen mit ihren Gegenpunkten nicht auf einander fallen, wohl aber zwei Hauptpunkte haben, so wird die Strecke zwischen den Hauptpunkten durch die homologen Punkte der conformen Reihen anharmonisch proportional getheilt. Die anharmonisch proportionale Theilung ist also nur ein besonderer Fall zweier in einer geraden Richtung vereinigten conformen Punktereihen.

e) So oft zwei in einer Geraden vereinigte conforme Reihen mit ihren Gegenpunkten auf einander fallen, übrigens zwei Hauptpunkte haben, so wird die Strecke zwischen den Hauptpunkten durch die homologen Punkte der conformen Reihen harmonisch getheilt. Es ist also auch die harmonische Theilung ein besonderer Fall conformer Punktereihen, die in einer Geraden vereinigt sind.

Bisher wurden nur Punkte einer und derselben geraden Richtung in den Bereich der Betrachtung gezogen; der Gesichtskreis ist nun dahin zu erweitern, dass die Punkte verschiedener Geraden mit einander in Beziehung gesetzt werden; und zwar ebenfalls in eine solche Beziehung, dass die Punkte der einen Geraden durch die Punkte der anderen Geraden in ihrer gegenseitigen Lage bestimmt werden. Wir haben es also jetzt mit Punktereihen verschiedener Geraden zu thun. Aeusserlich stellt man die Beziehung dadurch her, dass man die Punkte der einen Geraden mit denselben Buchstaben des Alphabets bezeichnet, wie die Punkte der anderen Geraden. Das Wesen der Beziehung soll ebenfalls das gleiche bleiben, nämlich die Gleichheit der Aufeinanderfolge und der Doppelverhältnisse. Weil aber jetzt keine gegebene feste Punkte, wie die Endpunkte der harmonisch oder der anharmonisch proportionalen Geraden, mehr unterscheiden werden, sondern alle Punkte einander coordinirt sind, so hat man vor Allem die zwei Mittel der Beziehung, nämlich das der Aufeinanderfolge und der Doppelverhältnisse, noch einmal näher in's Auge zu fassen, ehe man an das eigentliche Geschäft der Beziehung der Punkte zweier Geraden schreiten kann.

Was nun zuerst die Aufeinanderfolge der Punkte einer

Geraden betrifft, so werden wir zuerst bemerken, dass drei Punkte einer Geraden, wie man sie auch gegen einander versetzen mag, doch stets in der gleichen Aufeinanderfolge bleiben, sobald man den Begriff der Aufeinanderfolge nach der in §. 5 gewonnenen Anschauung festhält. Drei Punkte ABC lassen zwar sechs Permutationen zu ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA; in allen diesen Permutationen sind aber je zwei Punkte wie A und B in unmittelbarer Aufeinanderfolge begriffen; denn entweder stehen diese Punkte wirklich neben einander und dann sind sie ohnehin aufeinanderfolgend, oder aber sie sind durch den dritten Punkt C getrennt, dann sind sie die äusseren Punkte der Reihe und als solche sind sie ebenfalls aufeinanderfolgend (§. 5). Ein anderer Unterschied, der jedoch mit der der Aufeinanderfolge nicht zu verwechseln ist, ist der der Richtung und in dieser Beziehung zerfallen die sechs Permutationen in zwei Abtheilungen, deren eine eine Richtung hat, die der der andern entgegengesetzt ist. Die Richtung von der Linken zur Rechten bemerkt man in den Permutationen ABC, BCA, CAB; und die Richtung von der Rechten zur Linken zeigen die Permutationen ACB, BAC, CBA. Es sind sonach wenigstens vier Punkte nöthig, damit eine Mannigfaltigkeit in der Aufeinanderfolge möglich sei. Tritt aber noch ein vierter Punkt D zu den drei Punkten A, B und C hinzu, so kann er, welche Permutation auch zu Grunde gelegt werde, entweder zwischen A und B, oder zwischen A und C, oder endlich zwischen B und C stehen, und jedesmal bedingt er eine Verschiedenheit in der Aufeinanderfolge der vier Punkte.

Vier Punkte sind aber auch nothwendig, um bei der Beziehung ihrer Lage das bisher gebrauchte Mittel der Doppelverhältnisse in Anwendung zu bringen. Zwei dieser Punkte erscheinen als die Grenzpunkte einer Strecke, die zwei anderen als die Theilpunkte derselben (§. 10). Da aber je zwei Punkte in dem einen oder anderen Sinne gebraucht werden können, und da überdiess die Ordnung der Theilpunkte und der Endpunkte noch beliebig ist, so ist leicht einzusehen, dass eine grosse Zahl von solchen Doppelverhältnissen schon bei vier

gegebenen Punkten möglich ist. Und diese Doppelverhältnisse und ihre Beziehungen kennen zu lernen, soll nun ebenfalls noch versucht werden. Man kann die Doppelverhältnisse von vier gegebenen Punkten leicht übersehen, wenn man sie mit den Permutationen von vier Buchstaben in Verbindung bringt, und festsetzt, dass die zwei ersten Buchstaben die Grenzpunkte der Strecke sind, welche durch die zwei letzten Buchstaben getheilt wird und dass die Aufeinanderfolge der Abschnitte im Doppelverhältniss mit derjenigen der vier Buchstaben in der Permutation in Uebereinstimmung sei; hienach würde z. B. das Symbol AC, BD das Doppelverhältniss $\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}$ bezeichnen. Diese Bezeichnungsweise zeigt, dass die Zahl der Doppelverhältnisse zwischen vier Punkten mit der Permutation von vier Elementen übereinstimmen, also gleich 24 sein muss. Diese 24 Permutationen lassen sich in drei Gruppen abtheilen, welche mit dem Wesen der Doppelverhältnisse zusammenhängen, wenn man die Permutation so vollzieht, dass man das viergliedrige Produkt ABCD zuerst in die drei Doppelprodukte AB $\times$ CD; AC $\times$ BD; und AD $\times$ BC zerlegt, und nun jetzt erst die Permutationen dadurch vollendet, dass man die zwei Produkte gegen einander und die zwei Faktoren jedes einzelnen Produkts gegen einander versetzt. Dadurch gewährt jedes der drei Doppelprodukte noch 7 Permutationen, so dass man wieder die volle Zahl von $3 . 8 = 24$ Permutationen erhält.

Die acht Permutationen jeder dieser drei Gruppen können noch in zwei Abtheilungen, jede zu vier Permutationen vereinigt werden, wenn man noch darauf Rücksicht nimmt, ob die zwei Faktoren der zwei Produkte in Betreff der Richtung ihrer Aufeinanderfolge mit einander übereinstimmen oder nicht. Dadurch erhält man drei Gruppen von je zwei Abtheilungen und jede Abtheilung zu 4 Permutationen.

Die erste Abtheilung (einstimmiger Richtung) der ersten Gruppe ist AB, CD; BA, DC; CD, AB; DC, BA;
die zweite Abtheilung (entgegengesetzte Richtung) der ersten Gruppe ist AB, DC; BA, CD; DC, AB; CD, BA;

die erste Abtheilung der zweiten Gruppe ist

AC, BD; CA, DB; BD, AC; DB, CA;

die zweite Abtheilung der zweiten Gruppe ist

AC, DB; CA, BD; DB, AC; BD, CA;

die erste Abtheilung der dritten Gruppe ist

AD, BC; DA, CB; BC, AD; CB, DA;

die zweite Abtheilung der dritten Gruppe ist

AD, CB; DA, BC; CB, AD; BC, DA.

Nachdem nun die Doppelverhältnisse ihrer Form nach geordnet und in Abtheilungen gebracht sind, wird man mit Leichtigkeit auch ihre Werthe auffinden können. Man findet folgende Beziehungen:

a) die vier Doppelverhältnisse jeder Abtheilung sind einander gleich; diess zeigen die einfachsten Sätze der Bruchlehre, denn die vier Doppelverhältnisse der ersten Gruppe sind

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD};\ \frac{BD}{AD}:\frac{BC}{AC};\ \frac{CA}{DA}:\frac{CB}{DB};\ \frac{DB}{CB}:\frac{DA}{CA}$$

und jedes dieser Doppelverhältnisse ist dem Bruch $\frac{AC \,.\, BD}{BC \,.\, AD}$ gleich, folglich sind sie auch unter sich gleich. Auf gleiche Weise zeigt man auch, dass die Doppelverhältnisse jeder andern Abtheilung einander gleich sind.

b) In jeder Gruppe sind die Doppelverhältnisse der einen Abtheilung den reciproken Doppelverhältnissen der andern Abtheilung gleich. So sind die Doppelverhältnisse der zweiten Abtheilung der ersten Gruppe

$$\frac{AD}{BD}:\frac{AC}{BC};\ \frac{BC}{AC}:\frac{BD}{AD};\ \frac{DA}{CA}:\frac{DB}{CB};\ \frac{CB}{DB}:\frac{CA}{DA}$$

jedes dieser Verhältnisse ist aber dem Bruch $\frac{AD \,.\, BC}{AC \,.\, BD}$, welcher selbst wieder nur die reciproke Zahl von $\frac{AC \,.\, BD}{BC \,.\, AD}$ d. h. von der Zahl ist, welche den Werth der Doppelverhältnisse der ersten Abtheilung angibt.

c) Die Doppelverhältnisse der ersten Abtheilung der ersten Gruppe sind um die Zahl Eins grösser, als die Doppelverhältnisse der ersten Abtheilung der zweiten Gruppe.

Setzt man nämlich die Abschnitte $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, so ist, wenn die Buchstaben A, B, C, D in alphabetischer Ordnung an die vier Punkte angeschrieben werden,

$$AC = a + b,\ BD = b + c,\ AD = a + b + c$$

und bezeichnet man auch noch den Werth des Doppelverhältnisses AB, CD mit q, so ist

$$\frac{a+b}{b} : \frac{a+b+c}{b+c} = q$$

also auch $\frac{a+b}{b} : \frac{a+b+c}{b+c} - 1 = q - 1$

was nach gehöriger Reduktion übergeht in

$$\frac{a}{b} : \frac{a+b+c}{c} = q - 1$$

Est ist aber $\frac{a}{b} : \frac{a+b+c}{c} = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}$, d. h. gleich dem Doppelverhältniss, welches das Symbol AC, BD hat und der ersten Abtheilung der zweiten Gruppe angehört.

d) Die Doppelverhältnisse der dritten Gruppe sind dem Quotienten gleich, den man erhält, wenn man die Doppelverhältnisse der ersten Gruppe durch die entsprechenden Doppelverhältnisse der zweiten Gruppe dividirt.

Dividirt man das Doppelverhältniss $AB, CD = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ durch das Doppelverhältniss $AC, BD = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}$

so erhält man $\frac{AC}{AB} : \frac{CD}{BD}$ d. i. CB, AD.

In diesen vier Sätzen sind aber die Beziehungen zwischen allen Doppelverhältnissen vollständig gegeben und man kann alle Doppelverhältnisse sogleich berechnen, sobald nur eines derselben gegeben ist.

Setzt man das Doppelverhältniss der ersten Abtheilung oder $(AB, CD) = q$ so ist $(AB, DC) = \frac{1}{q}$, $(AC, BD) = q - 1$

$(AC, DB) = \frac{1}{q-1}$, $(AD, CB) = \frac{q}{q-1}$, $(AD, BC) = \frac{q-1}{q}$

Nach diesen Vorbereitungen kann an die eigentliche Aufgabe

des vorliegenden Abschnittes geschritten werden. Es ist vorausgesetzt, dass auf einer Geraden die Punkte A, B, C und auf einer andern die Punkte A', B', C' gegeben seien (Fig. 5). Nun existirt zu jedem Punkt D der ersten Geraden immer auch ein zweiter Punkt D' auf der zweiten Geraden, welcher zu den Punkten seiner Reihe bei gleicher Aufeinanderfolge die gleichen Doppelverhältnisse hat, wie der Punkt D zu den Punkten seiner Reihe. Denn vorausgesetzt, das Doppelverhältniss AB,CD der ersten Reihe sei gleich q, so findet sich auf der andern Geraden immer auch ein Punkt D', der so liegt, dass das Doppelverhältniss $A'B'C'D' = q$ ist. Denn wenn der Punkt D' allmählig alle Punkte der Geraden durchlauft, so nimmt das Verhältniss $\frac{A'D'}{B'D'}$ auch allmählig alle Werthe von 0 bis ∞ an; und weil das Verhältniss $\frac{A'C'}{B'C'}$ zwischen den ersten Punkten A', B', C' constant ist, so wird auch das Doppelverhältniss $A'B', C'D' = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$ nach und nach alle Werthe zwischen 0 und ∞ annehmen; es muss also auch eine Lage des Punktes D' geben, für welchen jenes Doppelverhältniss $= q$ ist. Sind aber diese Doppelverhältnisse der zwei Punktereihen einander gleich, so müssen auch alle anderen Doppelverhältnisse, deren Symbol durch die gleiche Permutation der Punkte ausgedrückt wird, einander gleich sein. So ist z. B.

das Doppelverhältniss $AC, DB = \frac{1}{q-1}$

während auch das Doppelverhältniss $A'C', D'B' = \frac{1}{q-1}$

ist, folglich ist auch das Doppelverhältniss $AC, DB = A'C', D'B'$ Das Gleiche findet bei allen sich entsprechenden Doppelverhältnissen Statt. Wir schliessen also, dass überhaupt alle einander entsprechenden Doppelverhältnisse der zwei Reihen einander gleich sind.

Diese Beziehungen können aber auch auf Reihen von grösserer Punktezahl ausgedehnt werden, denn vorausgesetzt, es seien auch E und E' noch ein Paar entsprechende Punkte,

welche mit den Punkten A, B, C und A′, B′, C′ in gleicher Aufeinanderfolge und unter gleichen Doppelverhältnissen stehen, so wird man schliessen, dass beliebige vier Punkte der einen Reihe mit vier Punkten der andern Reihe in gleicher Aufeinanderfolge und unter gleichen Doppelverhältnissen stehen. Dass überhaupt gleiche Aufeinanderfolge in beiden Reihen herrschen muss, sieht man sogleich ein. Dass aber auch die Doppelverhältnisse gleich sind, ergibt sich auf folgende Weise. Es lassen nämlich die fünf Punkte überhaupt vier Combinationen zu vier Elementen zu; für die Punkte A, B, C, D, E sind dieselben ABCD, ABCE, ABDE, ACDE und BCDE. Weil nach Voraussetzung

$(ABCD) = (A'B'C'D')$, so folgt $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$ und weil

$(ABCE) = A'B'C'E'$, so folgt $\frac{AC}{BC} : \frac{AE}{BE} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'E'}{B'E'}$

diese zwei Proportionen liefern die dritte

$$\frac{AD}{BD} : \frac{AE}{BE} = \frac{A'D'}{B'D'} : \frac{A'E'}{B'E'}$$

d. i. $AB, DE = A'B', D'E'$

ist aber $AB, CD = A'B', C'D'$, so ist auch $AC, BD = A'C', B'D'$ und ist $AB, CE = A'B', C'E'$, so ist auch $AC, BE = A'C', B'E'$ und aus diesen Gleichungen folgt wie oben

$$AC, DE = A'C', D'E'$$

und auf gleiche Weise findet man auch

$$BC, DE = B'C', D'E'.$$

So oft also zwei Paare von Punkten zu drei gegebenen Punkten so liegen, dass sie die gleiche Aufeinanderfolge zu ihnen haben und unter den gleichen Doppelverhältnissen stehen, so nehmen überhaupt je vier Paare von Punkten an dieser Eigenschaft Theil. Auf solche Weise kann man also, indem man immer wieder neue Paare von Punkten unter den gleichen Bedingungen hinzufügt, zwei Reihen herstellen, in welchen überhaupt gleiche Aufeinanderfolge und zwischen je vier homologen Punkten gleiche Doppelverhältnisse herrschen. Solche Punktereihen heissen conform. Aus der ganzen vor-

ausgehenden Entwicklung geht hervor, dass zwei conforme Punktereihen durch drei Paare homologer Punkte vollkommen bestimmt sind, d. h. dass zu jedem vierten Punkt der einen Reihe nur ein einziger Punkt der zweiten Reihe gehört. denn durch den vierten Punkt der ersten Reihe sind die Doppelverhältnisse zwischen denselben bestimmt, und durch den Werth dieser Doppelverhältnisse wird andererseits die Lage des vierten Punktes auf der zweiten Punktereihe bestimmt (§. 10). Ebenso folgt auch, dass zwei Punktereihen unter sich conform sind, sobald sie mit einer dritten Punktereihe conform sind.

Die conformen Reihen sind von grosser Wichtigkeit für die neuere Geometrie, sie verleihen ihr ihren Hauptcharakterzug, überall begegnet man ihnen wieder. Es ist daher nicht überflüssig, die besonderen Arten der conformen Reihen, sowie auch ihr Verhältniss zu der harmonischen und anharmonischen Theilung zu erforschen.

Weil die Conformität zweier Reihen schon durch drei Paare homologer Punkte bestimmt ist, so kann man sich auf diese kleine Anzahl von Punkten beschränken. Wie nun in der Aufeinanderfolge von drei Punkten in der Richtung ein Unterschied bemerkbar ist, so werden auch Reihen von grosser Punktezahl entweder in gleicher oder entgegengesetzter Richtung verlaufen. Einen andern, noch wesentlicheren Unterschied begründet der Umstand, ob die Punkte des unendlichen Raumes beider Reihen homolog sind oder nicht. Ersterer Fall ist möglich, weil die zwei Reihen ja auch aus drei Paaren von Punkten entwickelt werden können, deren eines dem unendlichen Raum angehört. Sind aber U und U′ die zwei homologen Punkte des unendlichen Raumes und sind A und A′, B und B′, C und C′ beliebige andere homologe Punkte des endlichen Raumes, so ist

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AU}{BU} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'U'}{B'U'}$$

oder weil nach Voraussetzung AU′, BU′, A′U′, B′U′ sämmtlich unendlich gross sind und $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ist, so folgt

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Man sieht hieraus, dass die homologen Abschnitte conformer Reihen proportional sind, sobald ihre Punkte des unendlichen Raumes homolog sind.

Wenn ausserdem noch $AC = A'C'$ sein sollte, so folgte aus obiger Proportion auch $BC = B'C'$. Es sind also auch solche Reihen von Punkten, in welchen die homologen Abschnitte einander gleich sind, conform. Dieser Fall der Conformität heisst Uniformität.

Für die Vergleichung der gegenseitigen Lage der homologen Punkte gewähren diejenigen zwei Punkte Q und Q′, Fig. 5, einen bequemen Anhaltspunkt, welche den unendlich entfernten Punkten der andern Reihe homolog sind und welche Gegenpunkte heissen. Es ist nämlich der Punkt Q der Reihe A, B, C dem unendlich entfernten Punkte Q′ der Reihe A′, B′, C′ und der Punkt $\mathfrak{Q}'$ der letzteren Reihe dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{Q}$ der Reihe A, B, C homolog. Weil aber nach Voraussetzung

$ABQ\mathfrak{Q} \barwedge A'B'Q'\mathfrak{Q}'$, so ist $\frac{AQ}{BQ} : \frac{A\mathfrak{Q}}{B\mathfrak{Q}} = \frac{A'Q'}{B'Q'} : \frac{A'\mathfrak{Q}'}{B'\mathfrak{Q}'}$

aber weil $\mathfrak{Q}$ und Q, im unendlichen Raume liegen und daher

$\frac{A\mathfrak{Q}}{B\mathfrak{Q}} = 1$, und $\frac{A'Q'}{B'Q'} = 1$, so folgt $\frac{AQ}{BQ} = \frac{B'\mathfrak{Q}'}{A'\mathfrak{Q}'}$

oder $AQ \,.\, A'\mathfrak{Q}' = BQ \,.\, B'\mathfrak{Q}'$.

Diese Beziehungen zwischen den homologen Punkten zu den Gegenpunkten zeigen noch auf einfacherem Wege als die Doppelverhätnisse, welche die Conformität voraussetzt, dass mit der Bewegung eines Punktes auf einer Geraden, auch eine stetige Bewegung des homologen Punktes verbunden ist und dass also, während der eine Punkt von der unendlichen Ferne her gegen seinen Gegenpunkt fortschreitet, der homologe Punkt auf der andern Geraden von seinem Gegenpunkte aus in's Unendliche fortrückt und dass so die zwei Aeste, in welche die Geraden durch die Gegenpunkte getheilt werden, sich umgekehrt entsprechen.

Wendet man diese Regeln auf den Fall an, da zwei conforme Punktereihen in einer geraden Richtung vereinigt sind,

so wird man sogleich bemerken, dass, wenn die homologen Punkte A, B, C und A′, B′, C′ einstimmig sind, das heisst nach der gleichen Seite hin auf einander folgen, diese Punkte auf verschiedenen Seiten der Gegenpunkte Q und $\mathfrak{Q}'$ liegen müssen. Denn weil der eine Punkt vom unendlichen entfernten Punkt gegen seinen Gegenpunkt sich hin bewegt, während der andere Punkt vom Gegenpunkt aus in's Unendliche hinausrückt, so müssen die zwei Punkte nothwendig nach entgegengesetzten Seiten hin sich bewegen, wenn sie sich gerade auf den zwei Aesten befinden, welche theilweise auf einander liegen, und sie werden sich aber in dem gleichen Sinne bewegen, wenn sie sich auf den entgegengesetzt liegenden Aesten bewegen. Fragt man nun, ob auch an einigen Orten zwei homologe Punkte der zwei conformen Reihen auf einander fallen, so wird man für den Fall der einstimmig conformen Reihen sogleich bemerken, dass diess jedenfalls nur zwischen den Gegenpunkten Q und $\mathfrak{Q}'$ der Fall seyn kann; weil nur die Punkte der Strecke $Q\mathfrak{Q}'$ die Eigenschaft haben, dass sie zugleich auf verschiedener Seite der Gegenpunkte, also etwa rechts von Q und links von $\mathfrak{Q}'$ liegen. Hat aber nun ein Punkt A der ersten Reihe die Eigenschaft, dass er mit dem Punkt A′ der zweiten Reihe zusammenfällt, so muss nach §. 19 das Produkt $AQ \,.\, A\mathfrak{Q}'$ einen constanten Werth p haben, während die Summe $AQ + A\mathfrak{Q}' = Q\mathfrak{Q}'$ ist. Diess liefert, wenn man für AQ und $A\mathfrak{Q}$ die Zahlen a und a′ und für $Q\mathfrak{Q}'$ die Zahl q setzt die zwei Gleichungen

$$a + a' = q$$
$$a \,.\, a' = p$$

woraus $a = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p}$

Es gibt also, wenn $\frac{q^2}{4} > p$, wirklich zwei reelle Werthe von a, also auch zwei Orte für A, welche der Bedingung entsprechen, dass zwei homologe Punkte der conformen Reihen in denselben vereinigt sind. Diese zwei Hauptpunkte falleu

aber zusammen, wenn $\frac{q^2}{4} - p = 0$, und dann existirt also nur ein Hauptpunkt. Wenn aber $\frac{q^2}{4} < p$, so wird a imaginär und es existirt gar kein Hauptpunkt.

Sind aber die in derselben Richtung vereinigten Punktreihen entgegengesetzt conform, so liegen je zwei homologe Punkte auf derselben Seite der Gegenpunkte und folglich stets auf der Verlängerung von $Q\mathfrak{Q}'$. Sollen nun aber in einem solchen Punkt A von $Q\mathfrak{Q}'$ zwei homologe Punkte vereinigt sein, so bleibt Alles wie oben, nur dass $a - a' = q$ und man erhält $a = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + p}$ woraus man sieht, dass hier immer zwei symmetrisch liegende Punkte vorhanden sind, welche der Bedingung entsprechen, indem der Werth von a nicht imaginär, aber auch nicht gleich Null werden kann.

Mit mehr als zwei Paaren von Punkten können die conformen Reihen nicht auf einander fallen, weil durch drei Punkte dieselben schon bestimmt sind, so dass sie, sobald sie mit drei Paaren homologer Punkte auf einander fallen, überhaupt mit allen Paaren ihrer homologen Punkte sich decken müssen (§. 17). Aber das kann eintreten, dass die Punktreihen so auf einander liegen, dass die Gegenpunkte Q und $\mathfrak{Q}'$ selbst auf einander fallen. Alsdann ist $q = o$ und wenn die Reihen einstimmig conform sind, so wird $a = \pm\sqrt{-p}$, und der Werth der Hauptpunkte ist imaginär; es existiren also hier keine Hauptpunkte: wenn aber die Reihen entgegengesetzt conform sind, so wird $a = \pm\sqrt{+p}$ und es existiren immer zwei Gegenpunkte, welche auf beiden Seiten von Q in gleicher Entfernung liegen; oder hier liegt der gemeinschaftliche Gegenpunkt in der Mitte zwischen den Hauptpunkten.

Man wird nun bereits bemerken, dass so oft Hauptpunkte existiren, die harmonische und anharmonische Theilung zum Vorschein kommt. Denn sind A und B die zwei Hauptpunkte,

ferner C und C', D und D', E und E' homologe Punkte der conformen Reihen, so folgt aus

$$ABCD \barwedge ABC'D'$$

dass $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC'}{BC'}:\frac{AD'}{BD'}$

oder $\frac{AC}{BC}:\frac{AC'}{BC'}=\frac{AD}{BD}:\frac{AD'}{BD'}$

die Punkte C und C', D und D' theilen also die Gerade AB anharmonisch proportional. Fallen aber die Gegenpunkte Q und Q' auf einander und setzt man für D und D' die homologen Punkte Q und Q', wo Q' im unendlichen Raum liegt, so erhält man

$$ABCQ \barwedge ABC'Q'$$

und $\frac{AC}{BC}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{AC'}{BC'}:\frac{AQ'}{BQ'}$

hier ist aber $AQ' = BQ' = \infty$ und $AQ = BQ$ (20, b)

folgt $\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{BC'}$

d. h. die Punkte C und C' theilen die Strecke AB harmonisch.

F. Involutorische Punktreihen.

§. 21. Der besondere Fall zweier in einer geraden Richtung vereinigten conformen Punktreihen, welche gerade eine solche Lage gegen einander haben, dass sie mit ihren Gegenpunkten auf einander fallen, ist von solcher Wichtigkeit, dass er durch einen besondern Namen, nämlich den der Involution, ausgezeichnet wird.

Sobald nämlich zwei conforme Runktreihen so in einer geraden Richtung vereinigt werden, dass sie, seien sie einstimmig oder entgegengesetzt liegend, mit ihren zwei Gegenpunkten auf einander fallen, so nimmt man überhaupt die Eigenschaft an ihnen wahr, dass die zwei Punkte der zwei Reihen, welche in einem Ort ihrer Richtung vereinigt sind, wieder solchen Punkten homolog sind, die an einem Orte auf einander fallen.

Durch diese Eigenschaft können zu einer gegebenen Zahl von Punkten, welche einer Reihe angehören, sogleich die homologen Punkte der zweiten Reihe einfach dadurch gefunden werden, dass man die accentuirten Buchstaben mit nicht accentuirten, und die nicht accentuirten

Buchstaben mit accentuirten gleichlautenden Buchstaben vertauscht. Wegen dieses Ineinandergreifens der Punkte beider Reihen wird von ihnen als von einer Reihe gesprochen, welche involutorisch genannt wird.

Es folgt hieraus, dass die Involution einer Geraden durch zwei Paare von Punkten vollkommen bestimmt ist, und dass zu jedem dritten Punkt der einen Reihe immer nur ein einziger homologer der andern Reihe existirt.

§. 22. Der Punkt, in welchem die zwei Gegenpunkte der zwei involutorischen conformen Punktreihen vereinigt sind, heisst der Centralpunkt der Involution.

Die Abschnitte, welche zwischen den homologen Punkten einer involutorischen Punktreihe und dem Centralpunkt der Involution liegen, sind umgekehrt proportional; das Rechteck aus zwei homologen Abschnitten ist also eine constante Zahl; und umgekehrt, so bald eine solche Lage von Punkten bei übrigens gleicher Aufeinanderfolge vorhanden ist, so stehen die Punkte in Involution.

§. 23. Wenn zwei in einer Richtung involutorisch vereinigte Punktreihen in ihrer Aufeinanderfolge übereinstimmen, so schliessen je zwei homologe Punkte den Centralpunkt ein, und es kann die Strecke, welche von zwei Punkten der einen Reihe begrenzt ist, nie einen mit ihren Endpunkten homologen Punkt der andern Reihe einschliessen, endlich haben die zwei Reihen in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends einen Hauptpunkt.

§. 24. Wenn zwei in einer Richtung involutorisch vereinigte Punktreihen in ihrer Aufeinanderfolge entgegengesetzt sind, so schliessen je zwei homologe Punkte den Centralpunkt ein, zwei homologen Paare von Punkten trennen sich gegenseitig, und es existiren zwei Hauptpunkte, in gleichen Entfernungen vom Centralpunkt. Die übrigen homologen Punkte dieser Involution theilen die Strecke zwischen den zwei Hauptpunkten harmonisch. Es ist die harmonische Theilung sonach ein besondere Fall der Involution, der übrigens auch schon in §. 20, e erwähnt wurde.

Da die Involution zu dem in §. 20 behandelten Fall gehört, so müssen auch alle dort ausgesprochenen Gesetze auf sie ihre Anwendung finden. Es gibt also auch zwei verschiedene Arten der Involution, je nachdem die zwei Punktreihen in einstimmiger oder entgegengesetzter Lage auf einander fol-

gen. Im ersten Fall liegen die homologen Punkte auf entgegengesetzter Seite des Centralpunktes (§. 21) und schliessen also denselben ein; im zweiten Fall liegen sie auf einer Seite desselben. Im ersten Fall können also zwei Punkte durch ihre homologen Punkte nicht getrennt werden, während diess im zweiten Fall geschieht; im ersten Fall existirt kein Hauptpunkt, während im zweiten Fall deren zwei existiren, welche in gleicher Entfernung vom Centralpunkt abstehen. Alle diese Folgerungen sind bereits in §. 20 enthalten. Es ist daher nur noch auf das Eigenthümliche der Involution aufmerksam zu machen, welches darin besteht, dass zwei Punkte, welche in einem Ort vereinigt sind, wieder solchen Punkten homolog sind, die ebenfalls auf einander fallen. Sind z. B. C und C′ zwei homologen Punkte der zwei Reihen und befindet sich in C′ zugleich der Punkt D der ersten Reihe, so muss auch der Punkt D′ der zweiten Reihe auf den Punkt C der ersten Reihe fallen, denn es ist jedenfalls

$$QD : QD' = QC' : QC,$$

weil aber in Voraussetzung C′ und D auf einander liegen, so ist $QC' = QD$, folglich ist auch $QD' = QC$; es muss also auch D′ mit C zusammenfallen. Daraus folgt, dass die Involution solche conforme Punktreihen enthält, welche durch Versetzung der Accente der homologen Punkte aufgefunden werden. Denn sind A, B, C und A′, B′, C′ die homologen Punkte, so sind auch die Punkte der ersten Reihe, welche in A′, B′, C′ liegen, den Punkten der zweiten Reihe, welche in A, B, C liegen, conform, also ist $ABC\,A'B'C' \barwedge A'B'C'\,ABC$. Hieraus folgt weiter, dass zwei Paare von Punkten hinreichen, um die Involution zu bestimmen, da $AB\,A'B' \barwedge A'B'AB$ und drei Paare ABA' und $A'B'A$ schon hinreichen, um alle übrigen Punkte der Conformität zu bestimmen.

F. Ueberblick über das erste Buch.

Die Anschauung der neueren Geometrie hat auch in ihrer Beschränkung auf die gerade Linie allmählig eine solche Mannigfaltigkeit wahrnehmen lassen, dass ein Ueberblick über das

bisher Errungene nicht ohne Werth sein wird, zumal, da die genetische Entwicklung, welche befolgt wurde, nicht sogleich Jedem auch die systematische Einheit, die in der Sache liegt, in's Bewusstsein rufen könnte. Die gerade Linie wird bei dieser Methode stets als eine Reihe von Punkten (gerades Gebilde) betrachtet und diese Reihen werden mit einander in's Verhältniss gesetzt, so dass die Punkte der einen Reihe den Punkten der andern Reihe entsprechen. Solche entsprechende Punkte werden mit gleichlautenden Buchstaben bezeichnet und heissen homolog.

Die allgemeine Beziehung nun zwischen solchen homologen Punktreihen ist die Conformität. Das Mittel der Beziehung zwischen den homologen Punktreihen ist aber ein doppeltes, nämlich die Gleichheit der Aufeinanderfolge und die Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen den homologen Abschnitten. Die Conformität zweier Reihen ist durch drei Paare homologer Punkte bestimmt. Von bemerkenswerther Lage sind die Gegenpunkte der conformen Reihen.

Die conformen Punktereihen zerfallen in drei Klassen:

a) die uniformen Punktereihen, bei welchen die homologen Abschnitte gleich sind;
b) die proportionalen Punktereihen, bei welchen die homologen Abschnitte proportional und die unendlich entfernten Punkte homolog sind;
c) die conformen Punktreihen im engern Sinne, bei welchen die unendlich entfernten Punkte nicht homolog sind.

Eine weitere Entwicklung ergibt sich, wenn zwei conforme Punktreihen in einer geraden Richtung vereinigt werden; diess kann aber so geschehen, dass die Aufeinanderfolge der Punkte in gleichem oder entgegengesetztem Sinne erfolgt, so dass einstimmig oder entgegengesetzte conforme Reihenpaare unterschieden werden müssen. Solche Reihen fallen entweder mit ihren Gegenpunkten auf einander oder nicht.

a) Fallen zwei in einer Richtung mit einander vereinigten Punktreihen mit ihren Gegenpunkten nicht aufeinander, so sind noch folgende Fälle zu unterscheiden:

α) Die Reihen fallen mit zwei homologen Punktpaaren nirgends aufeinander, diess ist nur bei einstimmig conformen Reihen dann der Fall, wenn $\frac{q^2}{4} < p$.

β) Die Reihen fallen nur mit einem Paar homologer Punkte aufeinander, wenn nämlich $\frac{q^2}{4} = p$, dann ist der Hauptpunkt in der Mitte zwischen den Gegenpunkten.

γ) Die Reihen fallen mit zwei Paaren homologer Punkte aufeinander, und haben also zwei Hauptpunkte; diess ist bei den einstimmigen conformen Reihen der Fall, wenn $\frac{q^2}{4} > p$ und eben diess geschieht bei allen entgegengesetzt conformen Punktreihen.

Im letzteren Falle wird die Strecke zwischen den Hauptpunkten von den homologen Punkten der zwei Reihen anharmonisch-proportional getheilt. Wenn einer von den Hauptpunkten in den unendlichen Raum fällt, so entsteht eine proportionale Umhüllung.

b) Fallen zwei in einer Richtung mit einander vereinigte Punktreihen mit ihren Gegenpunkten auf einander, so hat man den Fall, der Involution heisst.

α) sind die involutorischen Reihen in einstimmiger Lage, so haben sie keinen Hauptpunkt.

β) sind die involutorischen Reihen in entgegengesetzter Lage, so haben sie zwei Hauptpunkte, und es werden die Hauptpunkte von jedem Paar homologer Punkte harmonisch getrennt.

Hiemit sind die Arten der conformen Punktereihen erschöpft, und es ist die Basis gewonnen, welche allen weiteren Betrachtungen zu Grunde liegt.

Zweites Buch.

Der Vielstrahl.

A. Transversale des Dreiecks.

§. 25. Parallele Transversalen zwischen parallelen Geraden bilden gleiche Abschnitte, und umgekehrt:

Wenn zwei Transversalen auf zwei parallelen Geraden gleiche Abschnitte bilden, so sind sie auch unter sich parallel.

§. 26. Wenn man mit der Seite eines Dreiecks eine Transversale parallel zieht, so theilt sie die beiden anderen Seiten in proportionale Abschnitte, und umgekehrt:

Wenn eine Transversale zwei Seiten eines Dreiecks in gleichartigen Punkten schneidet und in proportionale Abschnitte theilt, so ist sie mit der dritten Seite parallel.

§. 27. Eine beliebige Transversale durchschneidet die Seiten eines Dreiecks entweder in lauter äusseren Punkten, oder in einem äusseren und zwei inneren Punkten und theilt in jedem Falle dieselben so, dass die Abschnitte eines Theilpunktes sich verhalten wie die gleichgeordneten Modulus der zwei anderen Theilpunkte. Umgekehrt: Wenn man auf den Richtungen der drei Seiten eines Dreiecks drei Theilpunkte, die entweder lauter äussere sind, oder unter welchen nur ein äusserer ist, so nimmt, dass die Abschnitte eines der Theilpunkte sich verhalten wie die gleichgeordneten Modulus der zwei anderen Theilpunkte so liegen die drei Theilpunkte in einer geraden Richtung.

Der eigentliche Gegenstand des zweiten Buches beruht auf einem Satz, der gewöhnlich in den Elementen der Geometrie, wo er hingehört, nicht in seiner Allgemeinheit behandelt wird, und der gleichwohl von der grössten Bedeutung ist. Diess ist der Satz über die Transversale des Dreiecks. Der-

selbe musste daher hier vorausgeschickt werden, ehe man zur wirklichen Aufgabe dieses Buches fortschreiten konnte. Die Transversale des Dreiecks kann aber entweder alle Seiten des Dreiecks durchschneiden, oder sie wird mit einer Seite desselben parallel laufen. Der letzte besondere Fall, §. 26, wird überall in den Elementen der Geometrie behandelt, und soll daher hier nicht näher besprochen werden. Es mag nur bemerkt werden, dass er selbst noch einen besonderen Fall einschliesst, der dann eintritt, wenn eine Ecke des Dreiecks in unendlicher Entfernung liegt, wodurch statt eines Dreiecks und seiner parallelen Transversalen zwei parallelen Geraden zwischen zwei parallelen Transversalen, §. 25, sich ergeben. Es ist bekannt, wie der letzte extreme Fall durch die Congruenz der Dreiecke, der besondere Fall 26 durch Anwendung des Falles 25 bewiesen wird, und es mag hier nur noch gezeigt werden, wie §. 25 auf 26 zurückgeführt wird.

Ein Blick auf Figur 6 zeigt, dass ein Dreieck überhaupt zweierlei Transversalen zulässt, solche nämlich, welche wie EF in Fig. 6, a die Fläche des Dreiecks und also zwei Seiten in zwei inneren Punkten E und F, und die dritte Seite in einem äusseren Punkte D, oder auch solche, welche die Dreiecksfläche nicht und daher auch alle Seiten des Dreiecks in äusseren Punkten E, F und D, Fig. 6, b durchschneiden. Trotz dieser Verschiedenheit ist die Transversale nur einem gleichen Gesetze unterworfen. Zieht man nämlich in Fig. 6, a oder in Fig. 6, b durch einen Endpunkt C des Dreiecks ABC mit der Transversalen EF eine Parallele CG, so folgt aus §. 26

$$AE : EC = AD : DG \text{ und } BF : FC = BD : DG.$$

Werden diese zwei Proportionen durch einander dividirt, so hebt sich das Glied DG auf und man erhält:

$$\frac{AE}{EC} : \frac{BF}{FC} = AD : BD.$$

Es ist aber $\frac{AE}{EC}$ der Modulus des Theilpunktes E, welchen die Transversale anf der Seite AC hervorbringt, und

ebenso ist $\frac{BF}{FC}$ der Modulus des Theilpunktes F, welchen die Transversale auf der Seite BC bildet. Dabei ist zu bemerken, dass die Vorderglieder $\frac{AE}{EC}$ und AD der zwei Verhältnisse mit ihren zuerst genannten Abschnitten AE und AD an demselben Punkt A liegen, so wie auch die Hinterglieder $\frac{BF}{FC}$ und BD mit ihren zuerst genannten Abschnitten BF und BD demselben Punkt B angehören, man sieht daraus, dass die Abschnitte eines Theilpunkts sich verhalten wie die gleichgeordneten Modulus der zwei anderen Theilpunkte. — Hätte man die Hilfslinie zwar der Transversalen parallel, aber durch ein anderes Eck des Dreiecks gezogen, so hätten sich folgende Proportionen ergeben.

$$AE : CE = \frac{AD}{BD} : \frac{CF}{BF} \quad \text{und} \quad BF : FC = \frac{BD}{AD} : \frac{CE}{AE}$$

Proportionen, die alle nach der gleichen Regel gebildet sind.

Dieser allgemeine Satz hat auch seine Umkehrung. Setzt man nämlich voraus, dass von den Punkten E, F und D die zwei ersten E und F innere Punkte sind, während der letztere D ein äusserer ist, und dass sie so liegen, dass

$$AD : BD = \frac{AE}{EC} : \frac{BF}{FC}$$

so müssen die Punkte E, F und D entweder in gerader Richtung seyn, oder es muss die Richtung der geraden EF die Richtung der Seite AB in einem Punkt D′ scheiden, der von dem Punkt D dieser Richtung verschieden ist. Im letzteren Falle lehrt aber der vorausgehende direkte Satz, dass

$$AD' : BD' = \frac{AE}{EC} : \frac{BF}{FC}$$

folglich ist jedenfalls

$$AD : BD = AD' : BD'.$$

Weil aber die Punkte E und F innere Punkte sind, so muss nothwendig D′ ein äusserer seyn, und also eine mit D gleichartige Lage haben. In diesem Fall können aber die

zwei Punkte, deren Modulus nach der letzten Proportion einander gleich sind, keine von einander verschiedene Lage haben (§. 3), sie decken sich und der Punkt D, welcher die oben vorausgesetzte Lage hat, liegt also mit den Punkten E und F in einer geraden Richtung.

B. Conformität der Vielstrahlen.

§. 28. Gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und durch einen Punkt gehen, bilden eine Gestalt, welche man Vielstrahl (Strahlenbüschel) heisst. Will man die Zahl der Geraden angeben, welche den Vielstrahl bilden, so sagt man Dreistrahl, Vierstrahl etc. Die Geraden welche den Vielstrahl bilden, heissen Strahlen, der Punkt, von welchem sie ausgehen, Scheitel (Centrum).

Wenn der Scheitel eines Vielstrahls im unendlichen Raum liegt, so erscheinen seine Strahlen des endlosen Raumes als Parallellinien. Parallellinien bilden daher einen extremen Fall des Vielstrahls, der Parallelvielstrahl heissen soll.

§. 29. Eine Gerade, die nicht durch den Scheitel des Vielstrahls geht, heisst Transversale, die Punkte, in welchen sie von den Strahlen des Vielstrahls geschnitten wird, heissen Theilpunkte. Sind zwei oder mehrere Transversalen durch einen Vielstrahl gezogen, so heissen die Theilpunkte, welche auf demselben Strahl liegen, unter sich und diesem Strahl homolog.

Die Theilpunkte zweier Transversalen eines Vielstrahls bilden zwei conforme Reihen, und zwar sind je zwei auf einem Strahle liegenden Theilpunkte homologe Punkte ihrer Conformität, auch sind in ihrem Convergenzpunkt zwei homologe Punkte vereinigt.

Dieses allgemeine Gesetz schliesst noch folgende besondere Fälle ein:

a) Parallele Transversalen werden durch jeden Vielstrahl proportional getheilt;

b) Ein Parallelvielstrahl theilt alle convergenten Transversalen proportional und alle parallelen Transversalen uniform.

§. 30. Das Gesetz, welchem die Transversalen eines Vielstrahls unterworfen sind, bietet ein Mittel dar, die Vielstrahlen selbst mit einander zu vergleichen. Die Vielstrahlen heissen nämlich selbst conform, sobald die Theilpunkte ihrer Transversalen beziehlich conforme Punktreihen sind; auch heissen die Strahlen der zwei Vielstrahlen homolog, welche durch die homologen Punkte ihrer Transversalen gehen.

a) Die Conformität zweier Vielstrahlen ist durch drei Paare ihrer homologen Strahlen vollkommen bestimmt. Wenn also von zwei Vielstrahlen drei Paare von Strahlen gegeben sind, so kann zu jedem vierten Strahl des einen Vielstrahls nur ein einziger homologer Strahl im anderen Vielstrahl gezogen werden. Auch sind zwei Vielstrahlen conform, sobald sie mit einem und demselben dritten Strahl conform sind.

b) Gleiche Vielstrahlen, d. h. solche, in welchen die homologen Strahlen gleiche Winkel mit einander machen, sind jedenfalls conform. Conform sind daher auch Vielstrahlen, deren homologe Strahlen einander parallel laufen oder senkrecht auf einander stehen.

c) Aber auch Vielstrahlen, die nicht einander gleich sind, können conform sein. Um die Conformität zweier solcher Vielstrahlen zu beurtheilen, sind besonders diejenigen Transversalen tauglich, welche mit zwei homologen Strahlen parallel gezogen werden. Transversalen, welche mit zwei homologen Strahlen zweier conformen Vielstrahlen parallel gezogen werden, erleiden durch die übrigen homologen Strahlen eine proportionale Theilung, und umgekehrt: Wenn zwei Vielstrahlen die Eigenschaft haben, dass ihre Transversalen, welche mit zwei homologen Strahlen parallel gezogen werden, proportional getheilt werden, so sind sie conform.

§. 31. Wenn zwei conforme Vielstrahlen einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, so heissen sie concentrisch; auch heissen sie einstimmig oder entgegengesetzt conform, je nachdem die Aufeinanderfolge ihrer homologen Strahlen in gleichem oder entgegengesetzten Sinne stattfindet.

a) Wenn zwei conforme Vielstrahlen mit mehr als zwei homologen Strahlen auf einander fallen, so fallen sie mit allen homologen Strahlen auf einander. Sie können also, wenn diess nicht geschehen soll, höchstens mit zwei homologen Strahlen auf einander fallen. Es kommen übrigens hier wie bei den conformen Punktreihen gleicher Richtung folgende Fälle vor: Einstimmig conforme Vielstrahlen können entweder mit zwei, oder mit einem, oder mit zwei homologen Strahlen auf einander fallen; entgegengesetzt conforme Vielstrahlen fallen immer mit zwei Paaren homologer Strahlen auf einander. Auch heisst man hier diejenigen Strahlenrichtungen, in welchen zwei homologe Strahlen vereinigt sind, Hauptstrahlen.

b) Es heissen zwei concentrische Vielstrahlen involutorisch, sobald sie die Eigenschaft haben, dass zwei in einer Richtung vereinigte Strahlen wieder mit zwei Strahlen homolog sind, die auf einander fallen.

Und sobald diess mit irgend zwei Paaren homologer Strahlen der Fall ist, so findet es auch bei allen übrigen Paaren ihrer homologen Strahlen Statt.

c) Der involutorische Vielstrahl einstimmiger Aufeinanderfolge hat keinen Hauptstrahl; der involutorische Vielstrahl entgegengesetzter Aufeinanderfolge hat stets zwei Hauptstrahlen. Die zwei Hauptstrahlen bilden mit jedem weitern Paar homologer Vielstrahlen einen harmonischen Vierstrahl. Zwei harmonische Vierstrahlen sind stets auch conform.

d) Jeder involutorische Vielstrahl theilt jede Transversale involutorisch, und jeder Vielstrahl, der eine Transversale involutorisch theilt, ist involutorisch. Jeder harmonische Vierstrahl theilt jede Transversale harmonisch, und umgekehrt.

e) Wenn eine Transversale mit einem Strahl eines harmonischen Vierstrahls parallel geht, so wird sie durch die drei übrigen Strahlen in gleiche Theile getheilt, und so oft sie eine solche Theilung erleidet, ist sie parallel auf dem vierten Strahl.

f) Ein Vielstrahl, welcher mit den zwei Seiten und zwei Diagonalen eines Parallelogramms parallel geht, ist stets harmonisch.

Der Vielstrahl, eine Versammlung gerader Linien, die alle durch einen bekannten Punkt der Ebene gehen, ist das einfachste Mittel, um alle Punkte der Ebene auf einen einzigen Punkt, den Scheitel des Vielstrahls zu beziehen, und dadurch seine Lage zu bestimmen. Es ist daher auch das Mittel, welches die analytische Geometrie] zu Grunde legt. In der Polarcoordination wird die Lage eines Punktes dadurch bestimmt, dass man die Lage des Strahls, auf dem der Punkt liegt, durch den Winkel bestimmt, welcher zwischen ihm und einem andern bekannten Strahl liegt, und seine Lage auf dem Strahl dadurch, dass man die Länge des Stücks, das zwischen ihm und dem Scheitel des Vielstrahls liegt, angibt. Auch die neuere Geometrie legt den Vielstrahl ihrer Methode zu Grunde, sie kümmert sich aber nicht um den Winkel, welchen die Strahlen mit einem Hauptstrahl machen, sondern sie sucht die gegenseitige Lage der Strahlen durch die Schnittpunkte zu bestimmen, welche dieselben mit einer Transversalen machen. Dadurch gewinnt sie den grossen Vortheil, dass sie die

Winkel vermeidet, die nur durch die incommensurablen trigonometrischen Maasse bestimmt werden können. Nun lässt zwar derselbe Vielstrahl unendlich viele Transversalen zu, es zeigt sich aber, dass zwischen denselben eine merkwürdige Uebereinstimmung in Betreff der Schnittpunkte herrscht, welche der Vielstrahl auf ihnen hervorbringt. Bezeichnet man die auf demselben Strahl liegenden Schnittpunkte mit einerlei Buchstaben, und heisst sie homolog, so wird man zuerst das bemerken, dass die homologen Theilpunkte zweier Transversalen unter sich und in Verbindung mit ihrem Convergenzpunkt stets in gleicher Aufeinanderfolge stehen, sobald man auch hier die Erweiterung des Begriffes der Aufeinanderfolge in Anwendung bringt, den man schon in §. 5 aufzustellen veranlasst war. Ein Blick auf die Figur 7 wird die Richtigkeit dieser Behauptung sogleich klar machen. In der That dreht man die Transversale A′B′C′ um den Convergenzpunkt Q dadurch, dass man den Winkel zwischen den Transversalen immer mehr wachsen lässt, so wird QA′ zuerst parallel mit dem Strahl OC werden, später wird sie ihn auf der Rückseite schneiden, und der Punkt C′, der mit A′ und B′ auf der gleichen Seite von Q lag, tritt jetzt auf die entgegengesetzte Seite, bei fortgesetzter Drehung der Transversalen QA′ in gleichem Sinne, wird auch der Punkt B′ und endlich auch der Punkt A′ auf der entgegengesetzte Seite von Q treten. Die Veränderungen, die in der Lage der Theilpunkte der Transversalen sich ergeben, bringen keine andere Veränderung hervor, als eine solche, welche durch die Versetzung der äussersten Punkte bezweckt wird, und weil die äussersten Punkte als aufeinander folgend betrachtet werden (§. 5), so wird dadurch die Aufeinanderfolge der Theilpunkte nicht gestört. Es finden aber noch weitere Uebereinstimmungen zwischen den Theilpunkten der Transversalen Statt. Jeder Strahl bildet nämlich mit den zwei Transversalen ein Dreieck, das von den andern Strahlen als von Transversalen geschnitten wird, und dadurch wird der Satz §. 27 auf sie anwendbar.

Das Dreieck QAA′ durch OBB′ geschnitten, liefert die Proportion

$$OA' : OA = \frac{A'B'}{QB'} : \frac{AB}{QB}$$

Dasselbe Dreieck OAA′ durch OCC′ geschnitten, liefert die Proportion

$$OA' : OA = \frac{A'C'}{QC'} : \frac{AC}{QC}$$

Es folgt hieraus

$$\frac{A'B'}{QB'} : \frac{A'C'}{QC'} = \frac{AB}{QB} : \frac{AC}{QC}$$

Die zwei Transversalen sind also in den homologen Punkten QABC und QA′B′C′ conform getheilt (§. 17). Und zieht man nun noch beliebige andere Strahlen des Vielstrahls, so sind nach dem Vorausgehenden doch alle dem gleichen Gesetz unterworfen, da ja drei Paare homologer Schnittpunkte mit dem Convergenzpunkt der Transversalen eine conforme Theilung begründen; man schliesst also, auf §. 18 gestützt, dass die Transversalen jedes Vielstrahls in ihren homologen Schnittpunkten conform getheilt sind, und dass auch der Convergenzpunkt der Transversalen ein homologer Punkt der conformen Theilung ist.

Sind die zwei Transversalen einander parallel, so liegt der Convergenzpunkt im unendlichen Raum, und weil er ein homologer Punkt der conformen Theilung ist, so geht für diesen Fall die conforme Theilung in die proportionale über (§. 19).

Hat man aber einen Parallelvielstrahl, so sind alle Geraden, welche mit den Strahlen parallel laufen, Strahlen des Parallelvielstrahls, es ist also auch die Gerade des unendlichen Raumes, welche den Strahlen des Parallelstrahls parallel geht, ein Strahl dieses Vielstrahls, und weil sie die Transversalen auch nur in Punkten des unendlichen Raumes schneiden kann, so sind also auch die unendlich entfernten Punkte beliebiger Transversalen homolog, und die conforme Theilung ist in diesem besonderen Falle eine proportionale (§. 19). Ein Parallelvielstrahl theilt also alle Transversalen, auch die convergenten, proportional.

Zieht man aber endlich auch in dem Parallelvielstrahl parallele Transversalen, so sind sie nicht nur proportional getheilt, sondern sie sind, wie man sich durch §. 26 sogleich überzeugt, uniform getheilt.

Diese merkwürdige Eigenschaft des Vielstrahls, alle seine Transversalen conform zu theilen, gibt ein Mittel an die Hand, die Vielstrahlen selbst mit einander zu vergleichen. Hat ein Vielstrahl die Eigenschaft, dass er eine Transversale so theilt, dass sie der Transversalen eines anderen Vielstrahls conform ist, so werden überhaupt alle Transversalen des ersten Vielstrahls den Transversalen des zweiten Vielstrahls conform getheilt, da zwei Linien unter sich conform getheilt sind, sobald sie einer und derselben dritten Linie conform getheilt sind (§. 17). Man heisst daher die Vielstrahlen selbst conform, sobald sie die Eigenschaft haben, dass sie ihre Transversalen beziehungsweise conform theilen; und diejenigen ihrer Strahlen, welche die homologen Punkte der conformen Theilung hervorbringen, heissen ebenfalls homolog. Die Conformität der Vielstrahlen ist für die Methode der neueren Geometrie von der grössten Wichtigkeit, indem dieselbe ihr gewährt die Lage einer Geraden durch die Lage einer andern bekannten Graden, und somit ohne Hilfe von Zahlausdrücken zu bestimmen. Wie aber die Conformität zweier Graden schon durch drei Paare ihrer homologen Punkte bestimmt ist, so muss offenbar auch die Conformität zweier Vielstrahlen durch drei Paare homologer Strahlen vollkommen bestimmt seyn. Sind Figur 8 drei Strahlen A, B, C eines Vielstrahls O und drei Strahlen 𝔄, 𝔅, ℭ eines zweiten Vielstrals 𝔒 gegeben, und man zieht in dem ersten Vielstrahl noch einen vierten Strahl D, so existirt in dem zweiten Vielstrahl ebenfalls nur ein einziger homologer Strahl 𝔇, wenn der zweite Vielstrahl dem ersten conform seyn soll, weil der Theilpunkt 𝔇, den er auf seiner Transversalen hervorbringt, durch den Theilpunkt D der Transversale des ersten Vielstrahls, vollkommen bestimmt ist (4. 17) und weil durch den Theilpunkt 𝔇 nur ein einziger Strahl des Vielstrahls 𝔒 gehen kann. Auf diese Weise wird durch jeden

Strahl des ersten Vielstrahls, der als bekannt betrachtet wird, ein Strahl im zweiten Vielstrahl bestimmt.

Zur Beurtheilung der Conformität zweier Vielstrahlen, so wie zur Construction conformer Vielstrahlen, sind unter den unzähligen Transversalen, die in jedem Vielstrahl gezogen werden können, diejenigen von besonderem Werthe, welche mit zwei homologen Strahlen parallel gezogen werden. Ist z. B. der Vielstrahl $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{ABCDE}$ dem Vielstrahl O, ABCDE conform, Fig. 8, und man zieht die Transversale $\mathfrak{OE} \parallel \mathfrak{QE}'$, die Transversale $OE \parallel QC'$, so liegen die Theilpunkte $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'$ den Theilpunkten $A'B'C'D'E'$ homolog. Wegen des vorausgesetzten Parallelismus liegen aber E' und $\mathfrak{E}'$ im unendlichen Raum, und weil diess homologe Punkte der conformen Theilung sind, so verwandelt sich die conforme Theilung hier in die proportionale (§. 18). Transversalen, welche mit den homologen Strahlen zweier Vielstrahlen parallel gezogen sind, erleiden daher eine proportionale Theilung. Dieser besondere Fall bietet ein leichtes Mittel dar, um in einem zweiten Vielstrahl der einem gegebenen ersten conform seyn soll, beliebig viele homologe Strahlen zu ziehen.

Wenn zwei conforme Vielstrahlen so auf einander gelegt werden, dass sich ihre Scheitel decken, so hat man den besondern Fall der concentrischen Vielstrahlen. Zieht man in solchen concentrischen Vielstrahlen eine Transversale, so wird sie von den conformen Vielstrahlen auch in conformen Punktreihen durchschnitten werden. Haben diese zwei in derselben Geraden vereinigten conformen Punktreihen eine einstimmige oder entgegengesetzte Aufeinanderfolge, so haben das Gleiche auch die zwei concentrischen Vielstrahlen; haben jene Hauptpunkte, so gehen durch dieselben offenbar auch Hauptstrahlen; kurz, es kehrt für die conformen concentrischen Vielstrahlen Alles wieder, was bei den conformen Punktreihen, die in einer Geraden vereinigt sind, beobachtet wurde.

Auch der besondere Fall der Involution wiederholt sich, sobald die Transversale durch die Vielstrahlen involutorisch getheilt wird, und im Fall die Aufeinanderfolge der Strahlen

in entgegengesetzter Ordnung geschieht, so ergibt sich auch hier der besondere Fall des harmonischen Vierstrahls.

Es wird hinreichen, nur noch darauf aufmerksam zu machen, dass der harmonische Vierstrahl (Fig. 9) jede Parallele AC, die mit einem Strahl OD parallel gezogen wird, in zwei gleiche Abschnitte theilt. Denn weil der Vierstrahl nach Voraussetzung harmonisch ist, so sind auch die Punkte A, E, C, D, in welchen er die Transversale schneidet, harmonisch. Es ist aber der Punkt D, weil OD || AC ist, in unendlicher Entfernung, folglich der Punkt E in der Mitte von AC (§. 7). Umgekehrt ist E in der Mitte von AC, so sind die Punkte A, E, C, D harmonisch, und ein Vielstrahl, der durch diese Punkte geht, ist harmonisch. Man sieht hieraus, dass ein Vierstrahl harmonisch seyn muss, wenn seine Strahlen mit den Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms parallel gehen.

C. Perspektivische Lage conformer Vielstrahlen und Geraden.

§. 32. Die Lage zweier conformen Punktreihen, bei welcher alle Verbindungslinien der homologen Punkte in einem Punkte convergiren, heisst perspektivisch. Der gemeinschaftliche Convergenzpunkt dieser Verbindungslinien heisst Projektionscentrum, die Verbindungslinien heissen Projektionsstrahlen.

Zwei conforme Punktreihen befinden sich in perspektivischer Lage:

a) Wenn in ihrem Schnittpunkt zwei homologe Punkte auf einander fallen.

b) Wenn drei Paare ihrer homologen Punkte perspektivisch liegen.

§. 33. Die Lage zweier conformen Vielstrahlen, bei welcher die Schnittpunkte ihrer homologen Strahlen alle auf einer Geraden convergiren, heisst ebenfalls perspektivisch, und die Gerade, welche die Schnittpunkte aller homologen Strahlen verbindet, heisst Projektionsaxe.

Zwei conforme Vielstrahlen befinden sich in perspektivischer Lage:

a) Wenn in der Verbindungslinie ihrer Scheitel, die wir Scheitellinie nennen, zwei homologe Strahlen auf einander fallen.

b) Wenn die Schnittpunkte dreier Paare ihrer homologen Strahlen perspektivisch liegen.

§. 34. Wenn zwei Geraden, welche mit einer dritten conform ge-

theilt sind, mit ihr perspektivisch liegen und in einem Punkte convergiren, so sind sie auch unter sich conform, sie befinden sich in perspektivischer Lage, und ihre Projektionscentra liegen in einer geraden Linie.

§. 35. Wenn zwei Vielstrahlen, welche mit einem dritten Vielstrahl conform sind und gegen ihn perspektivisch liegen, und mit ihren Scheiteln in einer geraden Linie liegen, so sind sie auch unter sich conform, befinden sich in perspektivischer Lage, und ihre drei Projektionsaxen convergiren in einem einzigen Punkte.

Um die Lage zu bezeichnen, in welcher die Punktreihen zweier Transversalen eines Vielstrahls sich befinden, kann die Anschauung der Projektion benützt werden. Von dem Strahl eines Vielstrahls, der durch einen Punkt geht, wird gesagt, er projizire denselben, und wenn der projizirende Strahl eine Linie oder eine Ebene durchschneidet, so heisst dieser Schnittpunkt die Projektion jenes Punktes. Wenn nun eine Reihe von Punkten auf eine andere Gerade von irgend einem Punkte aus projizirt wird, so ist ihre Projektion eine zweite Reihe von Punkten, die der ersten conform ist (§. 29); und die Lage dieser zwei Punktreihen wird dieser Anschauung gemäss perspektivisch genannt. Von zwei conformen Punktreihen wird also gesagt, sie liegen perspektivisch zu einander, sobald die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte, in einem einzigen Punkte convergiren, und zwar heissen jene Verbindungslinien Projektionsstrahlen, und ihr gemeinschaftlicher Convergenzpunkt Projektionscentrum. Aber auch wenn die Verbindungslinien nicht in einem Punkte convergiren sollten, so können sie dennoch der Analogie halber Projektionsstrahlen genannt werden. Auch von Vielstrahlen, welche durch die Punkte einer und derselben Geraden gehen, sagt man, dass sie perspektivisch liegen, weil sie beide dieselben Punkte einer Geraden projiziren, und die Gerade, auf welcher ihre homologen Strahlen convergiren, heisst Projektionsaxe.

Wenn nun die Conformität das Gesetz ist, welches allen durch Projektion aus einander hervorgegangenen Punktreihen und Vielstrahlen zu Grunde liegt, so fragt es sich nun, an welchen Merkmalen kann man erkennen, ob sie auch in der

unmittelbaren Lage sich befinden, welche mit dem Namen des Perspektivischen bezeichnet wird. Und hier wird die Eigenschaft der Transversalen im Vielstrahl (§. 29), dass in dem Convergenzpunkt zweier Transversalen zwei homologen Punkte der conformen Theilung vereinigt sind, ein leichtes Mittel an die Hand geben. Denn man kann auch den Umkehrungsschluss machen. Sind nämlich zwei in einem Punkt Q convergirende Gerade in ihren homologen Punkten conform getheilt, so bestimmen schon die Verbindungslinien AA′ und BB′ zweier Paare homologer Punkte (Fig. 8), das Centrum O; und sind nun auch in Q zwei homologe Punkte vereinigt, so wird ein viertes Paar homologer Punkte ebenfalls nur auf einem Strahl des Centrums O liegen können, weil durch drei Strahlen ein Vielstrahl vollkommen bestimmt ist (§. 30). In der That setzt man voraus, dass die Punkte A′, B′, C′ Q der einen Geraden den Punkten A, B, C und Q der andern Geraden conform sind, und zieht man von dem Convergenzpunkt O der Geraden AA′ und BB′ nach C den Strahl OC, so wird er entweder durch C′ gehen oder die zweite Gerade in einem differenten Punkt C″ schneiden. Wäre das Letztere der Fall, so lägen sowohl die Punkte A′, B′, C′ und Q als auch die Punkte A′, B′, C″ und Q den Punkten A, B, C, Q conform (§. 29). Es müssten also auch die Punkte A′, B′, C′ Q und A′, B′ C″ Q conform sein, was unstatthaft ist (§. 20, a).

Ein zweites Mittel zur Beurtheilung der perspektivischen Lage conformer Reihen ist die perspektivische Lage dreier Paare homologer Punkte. Sind nämlich zwei conforme Punktreihen in einer solchen Lage, dass die Verbindungslinien von drei Paaren homologer Punkte, etwa AA′, BB′ und CC′ in einem Punkte O convergiren, so haben die Punkte A′, B′, C′, Q mit den Punkten A, B, C und Q eine conforme Lage, und es decken sich in Q zwei homologe Punkte der conformen Theilung (§. 29); folglich liegen die Geraden nach dem unmittelbar Vorausgehenden perspektivisch.

Ganz denselben Gesetzen sind auch die conformen Vielstrahlen unterworfen. Ist der Vielstrahl P, AP′ BC (Fig. 11) dem

Vielstrahl P', A' P B' C' conform, und liegen dieselben so, dass zwei homologe Strahlen in der Verbindungslinie PP' ihrer Scheitel auf einander fallen, und verbindet man die Schnittpunkte α und β zweier homologen Strahlen durch eine Gerade, so ist sie eine Transversale, welche den Scheitelstrahl PP' in einem Punkt π schneidet, und es ist die Conformität der zwei Vielstrahlen durch die drei Paare der in Rede stehenden Strahlen vollkommen bestimmt. Ein weiteres Paar homologer Strahlen PC und P'C' wird die gemeinschaftliche Transversale auch nur in einem und demselben Punkte γ schneiden, denn wenn sie dieselben auch in zwei differenten Punkten γ und γ' schneiden würden, so würde man wieder auf zwei conforme Punktreihen geführt $\alpha\pi\beta\gamma$ und $\alpha\pi\beta\gamma'$, welche mit drei Paaren von homologen Punkten auf einander fallen, ohne ganz zu coincidiren, was mit §. 20 sich nicht verträgt. Die zwei Vielstrahlen haben also eine solche Lage, dass die Schnittpunkte aller homologen Strahlen auf einer und derselben Gerade $\alpha\beta$ liegen.

Auch wenn drei Paare homologer Strahlen perspektivisch liegen, so sind die Vielstrahlen überhaupt in perspektivischer Lage. Denn setzt man voraus, dass die Schnittpunkte α, β, γ von drei Paaren homologer Strahlen in gerader Linie liegen, und zieht man noch die Verbindungslinie PP' ihrer Scheitel, so sind nach §. 30 die Vierstrahlen P$\alpha\beta\gamma\pi$ und P'$\alpha\beta\gamma\pi$ conform, und es fallen in der Verbindungslinie PP' jetzt zwei homologe Strahlen aufeinander, folglich befinden sich die Vielstrahlen überhaupt in perspektivischer Lage, nach dem unmittelbar vorausgehenden Satze.

Wenn zwei Punktreihen X'𝔛' und X'' 𝔛'' mit einer dritten X𝔛 conform sind (Fig. 12), so sind sie auch unter einander conform (§. 17); sind aber die zwei erstgenannten Geraden mit der dritten in perspektivischer Lage, so folgt daraus noch nicht, dass sie auch unter sich perspektivisch liegen; damit diess folge, ist noch eine weitere Bestimmung nothwendig, nämlich die, dass sie alle drei in einem Punkt convergiren. Ist aber diess der Fall, so treffen in diesem gemeinschaftlichen Convergenz-

punkt zwei Punkte der Geraden $X'\mathfrak{X}'$ und $X''\mathfrak{X}''$ zusammen, welche einem und demselben Punkt der Geraden $X\mathfrak{X}$ homolog sind, weil vorausgesetzt ist, dass die zwei ersten Geraden mit der dritten perspektivisch liegen; es sind also jene zwei Punkte auch unter sich homolog, wenn also von drei in einem Punkt convergirenden conformen Punktreihen zwei mit der dritten perspektivisch liegen, so liegen sie auch gegen einander perspektivisch (§. 32, a). Zieht man also nun die Projektionsstrahlen, so werden sie in drei Scheiteln P, P' und P'' convergiren, eben damit werden sie aber in denselben drei Vielstrahlen bilden, die nicht nur conform sind (§. 30), sondern auch paarweise perspektivisch liegen (§. 33), also drei Vielstrahlen, welche die Eigenschaft haben, dass in drei Verbindungslinien je zweier Scheitel zwei homologe Strahlen aufeinander fallen (§. 33). Weil der Vielstrahl P' mit dem Vielstrahl P perspektivisch liegt, so fallen in der Richtung PP' die homologen Strahlen $P'\pi$ und $P\pi$ zusammen, und weil der Vielstrahl P'' auch mit dem Vielstrahl P perspektivisch liegt, so fallen in der Richtung PP'' die zwei homologen Strahlen $P''\pi'$ und $P\pi$ zusammen; folglich fallen auch die Strahlen $P'\pi$ und $P''\pi$ mit dem homologen Strahl $P\pi$ zusammen, und die drei Scheitel P, P' und P'' liegen somit in einer Geraden.

Wenn umgekehrt zwei Vielstrahlen P' und P'' einem dritten Vielstrahl P conform sind, so sind sie auch unter sich conform (§. 30), aber wenn zwei Vielstrahlen mit einem dritten perspektivisch liegen, so folgt daraus noch nicht, dass sie auch unter sich perspektivisch liegen, dazu ist noch die weitere Bedingung nöthig, dass die drei Scheitel der Vielstrahlen in einer geraden Richtung liegen. Sind aber wirklich zwei Vielstrahlen P' und P'' dem Vielstrahl P nicht nur conform, sondern befinden sie sich mit demselben auch in perspektivischer Lage, und liegen ihre Scheitel in einer Richtung, so werden die Strahlen $P'\pi''$ und $P''\pi$, welche dem Strahl $P\pi$ homolog sind, auch unter sich homolog sein, und weil sie mit der Richtung P'P'' der Scheitelverbindung zusammen fallen ,so sind die Vielstrahlen P' und P'' auch unter sich in

perspektivischer Lage (§. 33). Ihre Axen $X\mathfrak{X}$ und $X''\mathfrak{X}''$ bilden nun aber Transversalen des Vielstrahls P', und es decken sich also im Convergenzpunkt Q dieser Geraden zwei homologe Punkte der conformen Theilung (§. 29). Es ist aber auch $X\mathfrak{X}$ neben $X''\mathfrak{X}''$ eine Transversale des Vielstrahls P'', es decken sich also auch im Convergenzpunkt dieser zwei Geraden zwei homologe Punkte ihrer conformen Theilung. Ebenso decken sich auch im Convergenzpunkt der Axen $X'\mathfrak{X}'$ und $X''\mathfrak{X}''$ zwei homologe Punkte der conformen Theilung. Es sind also auch die drei Convergenzpunkte nothwendig homolog, und da je zwei mit dem dritten zusammen fallen, so müssen sie alle in einem einzigen Punkte aufeinander fallen, oder die drei Axen der drei paarweisen perspektivischen Vielstrahlen convergiren in einem einzigen Punkt.

D. Projektivische Lage conformer Punktreihen.

§. 36. Wenn zwei conforme Punktreihen nicht perspektivisch liegen, also in ihrem Convergenzpunkt keine homologen Punkte vereinigt sind, so convergiren keine drei Projektionsstrahlen in einem Punkt, vielmehr convergiren alle Projektionsstrahlen in differenten Punkten, demungeachtet kann, wenn man noch eine dritte Punktreihe als Mittelglied dazwischen bringt, die eine auf die andere projektivisch bezogen werden, so dass jede mit dem Mittelglied perspektivisch liegt. Aus diesem Grunde heissen zwei conforme Punktreihen, welche nicht perspektivisch gegen einander liegen, projektivisch.

§. 37. Die projektivische Beziehung zweier conformen Punktreihen kann zwar durch ein drittes Mittelglied jederzeit vollzogen werden, es kann aber auch diese Beziehung wieder für sich selbstständig aufgefasst werden.

Es bilden nämlich die geraden Richtungen zweier conformen Punktreihen mit je vier Projektionsstrahlen stets ein Sechsseit, dessen Diagonalen der gegenüberstehenden*) Ecken in einem einzigen Punkte convergiren, und umgekehrt:

Wenn die Diagonalen der gegenüberstehenden Ecken eines Sechsseits in einem Punkt convergiren, so werden je zwei Seiten durch die vier übrigen conform getheilt.

*) Die 1ste und 4te, 2te und 5te, 3te und 6te Ecke heissen gegenüberstehend.

§. 38. Wenn man unter den Punkten der conformen oder projektivischen Geraden diejenigen in Betracht zieht, welche mit den in ihrem Convergenzpunkt vereinigten homolog sind, so wird die unmittelbare Beziehung noch einfacher, indem das Vierseit jetzt zu dieser Beziehung ausreicht.

a) Wenn man nämlich durch den Schnittpunkt der zwei Diagonalen eines Vierseits eine beliebige Transversale zieht, welche zwei gegenüberstehende Seiten durchschneidet, so werden diese Seiten durch die Transversale und ihren eigenen Convergenzpunkt projektivisch getheilt, und zwar sind die in diesem Convergenzpunkt vereinigten Punkte den Schnittpunkten der Transversalen homolog.

Dieser Satz hat zwei Umkehrungssätze:

b) Eine Gerade, welche zwei gegenüberstehende Seiten eines Vierseits in solchen Punkten schneidet, welche in Gemeinschaft mit dem Convergenzpunkt der Seiten eben diese Seiten projektivisch theilt, geht durch den Convergenzpunkt der Diagonalen.

c) Zwei projektivische Punktreihen bilden mit je zwei ihrer Projektionsstrahlen ein Vierseit, dessen Diagonalen in einem Punkte einer und derselben Geraden convergiren, nämlich derjenigen, welche die zwei Punkte verbindet, die den in ihrem Convergenzpunkt vereinigten Punkten homolog sind.

Ein besonderer Fall ergibt sich, wenn die Transversale des Vierseits zugleich eine solche Lage hat, dass sie durch den Convergenzpunkt der zwei andern Seiten geht.

d) Wenn man den Convergenzpunkt zweier Diagonalen mit dem Convergenzpunkt zweier gegenüberstehenden Seiten durch eine Gerade verbindet, so bildet diese Gerade mit den zwei Seiten und der dritten Diagonale, die in dem gleichen Eckpunkt convergiren, einen harmonischen Vierstrahl.

Sobald zwei conforme Punktreihen so gegen einander liegen, dass in ihrem Convergenzpunkt zwei homologe Punkte vereinigt sind, so convergiren alle ihre Projektionsstrahlen in einem einzigen Punkt, und diess letztere geschieht auch, so bald nur irgend drei Projektionsstrahlen in einem Punkte convergiren. Man sieht daraus, dass die Lage zweier conformen Punktreihen nur zwei Fälle gestattet, dass nämlich entweder alle Projektionsstrahlen in einem Punkte convergiren, oder

dass sie durchaus in differenten Punkten convergiren. Obgleich nun aber dieser letztere Fall nicht gestattet, die Punktreihen unmittelbar durch das Mittel der Projektion auf einander zu beziehen, wie diess bei der perspektivischen Lage der Fall ist, so kann es dennoch mittelbarer Weise dadurch geschehen, dass man eine dritte conforme Punktreihe zu Hilfe zieht, mit der die zwei gegebenen Punktreihen zugleich perspektivisch liegen. Es seien z. B. auf den Geraden $X'\mathfrak{X}'$ und $X''\mathfrak{X}''$ (Fig. 13) die Punktreihe

$$A'B'C'D'E' \barwedge A''B''C''D''E''$$

jedoch in projektivischer Lage gegeben, so dass im Convergenzpunkt Q die zwei differenten Punkte C'' und D' vereinigt sind, so lässt sich zeigen, dass diese zwei Geraden mit einer dritten $X\mathfrak{X}$, welche die ersteren in beliebigen nicht homologen Punkten A' und B'' schneidet, in perspektivische Lage zu bringen ist. Nimmt man nämlich auf einem Projektionsstrahl $A'A''$, welcher durch den einen jener Punkte geht, den Punkt O'' als Projektionscentrum zwischen $X''\mathfrak{X}''$ und $X\mathfrak{X}$, und bestimmt durch Strahlen dieses Centrums die Punkte D, E, so ist in perspektivischer Lage

$$AEDB \barwedge A''D''E''B''$$

folglich auch $\quad ADEB \barwedge A'D'E'B$ (§. 17).

Da aber nach Construction das Centrum O'' auf $A'A''$ liegt, so fällt der Punkt A der Geraden $X\mathfrak{X}$, welcher dem Punkt A'' der Geraden $X''\mathfrak{X}''$ homolog ist, auch mit dem Punkt A' der Geraden $X'\mathfrak{X}'$ zusammen.

Es befinden sich also auch die conformen Punktreihen ADEB und $A'D'E'B'$ in perspektivischer Lage (§. 32). Es werden also auch die Verbindungslinien CC', DD', EE' in einem Punkte O', dem Projektionscentrum zwischen den Geraden $X\mathfrak{X}$ und $X'\mathfrak{X}'$ convergiren. Es sind also wirklich je zwei conforme Punktreihen mit der beliebigen dritten in perspektivischer Lage, für zwei verschiedene Projektionscentra.

Die Projektionscentra O' und O'' sind hiebei nicht ganz beliebig, denn einmal müssen sie auf den Projektionsstrahlen $A'A''$ und $B'B''$ liegen, welche durch die Schnittpunkte der

Geraden $X\mathfrak{X}$ gehen, sodann aber ist leicht zu sehen, da diess Richtung $O'O''$ selbst durch zwei homologe Punkte G' und G'' der gegebenen Punktreihen geht; da wegen der perspektivischen Lage von $X\mathfrak{X}$ und $X''\mathfrak{X}''$ der Punkt G'' homolog mit G, und wegen der perspektivischen Lage von $X\mathfrak{X}$ und $X'\mathfrak{X}'$ der Punkt G' homolog mit G ist, also auch G' homolog mit G'' sein muss.

Umgekehrt kann man auch sagen, so oft zwei Projektionsstrahlen $A'A''$ und $B'B''$ durch einen dritten $G'G''$ in zwei Punkten geschnitten werden, so sind diese Schnittpunkte O' und O'' die Projektionscentra für die perspektivische Beziehung der Verbindungslinie $A'B''$ und der gegebenen conformen Geraden; wenn also E' und E'' noch zwei weitere homologe Punkte der letzteren sind, so convergiren $O'E'$ und $O''E''$ in einem Punkt E der gemeinschaftlichen Projektionsaxe.

Diese Eigenschaft, welche die projektivische Beziehung zweier Geraden enthält, kann ohne den Begriff der Projection fast noch einfacher gefasst werden. Denn es bilden die vier Projektionsstrahlen $A'A''$, $B'B''$, $E'E''$ und $G'G''$ mit den gegebenen Geraden $X'\mathfrak{X}'$, $X''\mathfrak{X}''$ ein Sechsseit, in welchem die Geraden $A'B''$, $O'E'$ und $O''E''$ als die Diagonalen der gegenüberstehenden Ecken figuriren. Man kann also auch sagen: zwei conforme Punktreihen bilden mit vier ihrer Projektionsstrahlen stets ein solches Sechsseit, in welchem die Diagonalen der gegenüberstehenden Seiten in einem Punkt convergiren.

Dieser Satz kann auch umgekehrt werden. Hat das Sechsseit $A'E'E''B''O'O''$ die Eigenschaft, dass die Diagonalen der gegenüberstehenden Ecken in einem Punkte E convergiren, so erscheint O' als das Projektionscentrum zwischen den perspectivischen Punktreihen $A'EB''G$ und $A'E'B'G'$. Ebenso erscheint O'' als das Projectionscentrum der perspektivischen Punktreihe $A'EB''G$ und $A''E''B''G''$, folglich ist

$$A'EB''G \barwedge A'E'B'G' \text{ und } A'EB''G \barwedge A''E''B''G''$$

also

$$A'E'B'G' \barwedge A''E''B''G''.$$

In solchen Sechsseiten werden also zwei Seiten durch die vier übrigen conform getheilt.

Diese Beziehung zwischen conformen Geraden perspektivischer Lage nimmt noch eine einfachere Gestalt an, wenn unter den Theilpunkten auch noch diejenigen aufgenommen werden, welche im Convergenzpunkt Q vereinigt sind, denn dadurch fallen von den vier Projektionsstrahlen zwei, nämlich C′C″ und D′D″ mit der gegebenen Geraden X′𝔛′ und X″𝔛″ zusammen, und schneiden die dritte O′O″ ebenfalls in zwei Punkten G′G″ derselben gegebenen Geraden (Fig. 14), dadurch erhält man ein Sechsseit G′G″D″E″E′C′, in welchem zwei Paare von Seiten in zwei Richtungen zusammenfallen, also in Wirklichkeit ein Vierseit G′G″E″E′, in welchem die Diagonalen in einem Punkt derjenigen Geraden D″C′ convergiren, welche die differenten Punkte C′ und D″ verbindet, die mit den in Q vereinigten Punkten C″ und D′ homolog sind. Diese Eigenschaft des Vierseits kann übrigens auch sehr leicht direkt nachgewiesen werden, was wegen der Wichtigkeit, welche sie hat, von Interesse ist. Es sey daher G′G″E″E′ ein ganz beliebiges Vierseit, dessen Diagonalen in dem Punkt E convergiren. Zieht man durch diesen Punkt E noch eine ganz beliebige Gerade C′D″, so erhält man zwei Vierstrahlen G′, G″D″E″C″ und G″; G′C′E′D′, welche gegen die Gerade D″EC′ perspektivisch liegen (§. 33), und welche desshalb auch die Transversalen G″Q und G′Q conform theilen, folglich

$$G''D''E''C'' \barwedge G'D'E'C'$$

In dem Convergenzpunkt Q der zwei Gegenseiten G″E″ und G′E′ des Vierseits sind also die zwei nicht homologen Punkte D′ und C″ vereinigt, welche dem Punkte D″ und C′ der Geraden C′D″ homolog sind.

Dieser Satz bietet zwei Umkehrungssätze dar. Weiss man, dass auf den gegenüberstehenden Seiten des Vierseits G′G″E″E′ die Punkte C′ und D″ so liegen, dass $G''D''E''C'' \barwedge G'D'E'C'$, so müssen die von G′ und G″ nach diesen Punkten gezogenen Geraden zwei conforme Vielstrahlen bilden, welche, weil sie auf ihrer Scheitellinie G′G″ zwei homologe Strahlen vereinigt haben, auch perspektivisch gegen einander liegen (§. 33), folglich liegen die Punkte D″ und C′ mit E, als die Convergenz-

punkte ihrer homologen Strahlen in einer geraden Richtung, es muss also der Convergenzpunkt E der Diagonalen auf der Geraden $C'D''$ liegen, welche die Punkte vereiniget, die mit den zwei in Q auf einander fallenden Punkten homolog sind, oder es muss die Gerade $C'D''$ durch den Convergenzpunkt der Diagonalen gehen.

Diese allgemeine Eigenschaft des Vierseits bietet noch einen besonderen Fall dar, der sich daraus ergibt, dass die Transversale, welche durch den Convergenzpunkt der Diagonale geht, gerade eine solche Lage hat, dass sie auch durch den Convergenzpunkt derjenigen Gegenseiten geht, welche sie zunächst nicht schneidet. Ist nämlich BDEF (Fig. 32) ein Vierseit, dessen gegenüberstehende Seiten in den Punkten A und O, und dessen Diagonalen in dem Punkte C convergiren, und zieht man die Transversale MN so, dass sie durch den Punkt O geht, so ist nach dem unmittelbar Vorausgehenden

$$\text{BFAN} \barwedge \text{DEMA}.$$

Weil aber auch die Seiten BF und DE durch den Dreistrahl in O conform, in perspektivischer Lage getheilt wurden,

so ist $\quad \text{BFAN} \barwedge \text{DEMA}$

folglich $\quad \text{DEMA} \barwedge \text{DEAM},$

d. i. $$\frac{\text{DM}}{\text{EM}} : \frac{\text{DA}}{\text{EA}} = \frac{\text{DA}}{\text{EA}} : \frac{\text{DM}}{\text{EM}}$$

woraus $$\left(\frac{\text{DM}}{\text{EM}}\right)^2 = \left(\frac{\text{DA}}{\text{EA}}\right)^2 \text{ also } \frac{\text{DM}}{\text{EM}} = \frac{\text{DA}}{\text{EA}}$$

Die Punkte A, D, M, E liegen also harmonisch und der Vielstrahl O, ADME ist ebenfalls harmonisch.

E. Projektivische Lage conformer Vielstrahlen.

§. 39. Wenn zwei conforme Vielstrahlen nicht perspektivisch liegen, also in ihrer Scheitellinie keine homologe Strahlen vereinigt sind, so liegen nirgends drei Convergenzpunkte ihrer homologen Strahlenpaare in gerader Richtung; demungeachtet kann man noch einen dritten conformen Vielstrahl als Mittelglied in solcher Lage zeichnen, dass er mit jedem der zwei gegebenen Vielstrahlen perspektivisch liegt. Aus diesem Grunde heissen zwei Vielstrahlen, welche nicht perspektivisch gegen einander liegen, projektivisch.

§. 40. Die projektivische Beziehung zweier conformen Vielstrahlen kann zwar durch ein drittes Mittelglied jederzeit vollzogen werden, es kann aber auch diese Beziehung für sich selbstständig aufgefasst werden.

Es bilden nämlich die Scheitel zweier conformen Vielstrahlen mit je vier Convergenzpunkten ihrer homologen Strahlenpaare stets ein Sechseck, in welchem die Convergenzpunkte der gegenüberstehenden Seiten in einer geraden Linie liegen, und umgekehrt:

Wenn die gegenüberstehenden Seiten eines Sechsecks in drei Punkten convergiren, die in einer geraden Linie liegen, so bilden die in zwei Eckpunkten convergirenden Seiten und Diagonalen stets zwei conforme Vierstrahlen projektivischer Lage.

§. 41. Wenn unter den Strahlen der projektivischen Vielstrahlen auch solche in Betracht gezogen werden, welche mit den in der Scheitellinie vereinigten homolog sind, so wird die Beziehung der zwei Vielstrahlen noch einfacher, indem dieselbe durch ein Viereck geschehen kann.

a) Wenn man nämlich durch einen beliebigen Punkt einer Diagonalen eines Vierecks, von zwei gegenüberstehenden Ecken aus zwei Strahlen zieht, so bilden sie mit der Diagonale, welche diese Ecken verbindet, und mit den in diesen Ecken convergirenden Seiten zwei projektivische Vierstrahlen, und zwar sind die in der Scheitellinie vereinigten Strahlen mit den Strahlen homolog, welche in dem beliebig genommenen Punkt convergiren.

b) Wenn man zu den zwei Dreistrahlen, welche in zwei gegenüberstehenden Ecken durch die Seiten und die Diagonale dieser Ecken gebildet werden, noch zwei weitere Strahlen so zieht, dass die Vierstrahlen jetzt projektivisch sind, und die letzteren zwei Strahlen den in der Scheitellinie liegenden Strahlen homolog sind, so convergiren diese zwei Strahlen in einem Punkt der andern Diagonale, welche durch die Convergenzpunkte der Gegenseiten geht.

c) Die Scheitel zweier projektivischen Vielstrahlen bilden mit den Convergenzpunkten zweier homologer Strahlenpaaren ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten in zwei Punkten convergiren, die mit einem und demselben Punkte in gerader Richtung liegen, nämlich mit dem Convergenzpunkt derjenigen zwei Strahlen, welche den in der Scheitellinie vereinigten Strahlen homolog sind.

d) Die Diagonalen eines vollständigen Vierecks theilen sich gegenseitig harmonisch.

Die Sätze, welche bei Gelegenheit der projektivischen Punktreihen sich ergeben, wiederholen sich bei den projektivischen Vielstrahlen auf eine auffallende Weise, weil die Conformität der Vielstrahlen auf der der Punktreihen beruht. Diese Uebereinstimmung ist so gross, dass man nur gewisse Merkmale verwechseln darf, nämlich den Punkt mit der geraden Richtung, die Punktreihe mit dem Vielstrahl, um sogleich das Eine aus dem Andern zu entnehmen. Demungeachtet ist es nöthig, die Projektivität der Vielstrahlen einer besonderen Betrachtung zu unterwerfen.

Sobald zwei conforme Vielstrahlen so gegen einander liegen, dass in ihrer Scheitellinie zwei homologe Strahlen vereinigt sind, so liegen die Convergenzpunkte aller homologen Strahlenpaare in einer geraden Richtung (§. 33), und diess geschieht auch, sobald nur drei solcher Convergenzpunkte in einer geraden Richtung liegen. Man sieht daraus, dass die Lage zweier conformen Vielstrahlen nur zwei Fälle gestattet, dass nämlich alle Convergenzpunkte ihrer homologen Strahlenpaare in einer geraden Richtung liegen, oder dass keine drei derselben in einer geraden Richtung liegen, folglich alle auf einer Curve sich befinden. Demungeachtet können auch zwei solche conforme Vielstrahlen durch das Mittel der Projektion auf einander bezogen werden, indem immer ein dritter conformer Vielstrahl gezeichnet werden kann, der mit jedem der zwei gegebenen in perspektivischer Lage sich befindet. Diess geht schon daraus hervor, dass man für die Vielstrahlen Punktreihen ihrer Transversalen setzen kann, welche sodann eine projektivische Beziehung nach dem vorausgehenden Abschnitt gestatten.

Allein es kann diese Beziehung auch unmittelbar geschehen. Denn vorausgesetzt, dass O′ und O″ zwei projektivische Vielstrahlen sind (Fig. 15), in welchen drei Paare homologer Strahlen in den Punkten A″, Q und B′ convergiren, so kann man durch Q und A″ die Transversale X″𝔛″ und durch Q und B′ die Transversale X′𝔛′ ziehen. Diese Transversalen werden durch die homologen Strahlen der Vielstrahlen nicht nur conform getheilt (§. 30), sondern sie sind, weil in ihrem Convergenzpunkt

Q zwei homologe Strahlen der Punktreihen vereinigt sind, auch in perspektivischer Lage (§. 32). Der Convergenzpunkt O ihrer Projektionsstrahlen B′B″, A′A″ ist ihr Projektionscentrum. Wenn man also noch ein viertes Paar von homologen Strahlen zieht, welche in E convergiren, und die Transversalen in E′ und E″ schneiden, so sind auch E′ und E″ homologe Punkte der perspektivischen Punktreihen auf X′𝔛′ und X″𝔛″, und es muss also auch E′E″ durch das Projektionscentrum O dieser perspektivischen Punktreihen gehen. Es ist also der Vielstrahl O, welcher den Vielstrahl O′ in den Punkten A′B′E′Q der Transversalen X′𝔛′ durchschneidet, mit dem letzteren in perspektivischer Lage; er ist aber auch mit dem Vielstrahl O″ in perspektivischer Lage, weil seine Strahlen mit denen des letzteren in den Punkten A″B″E″Q″ der Geraden X″𝔛″ convergiren; und die Vielstrahlen O′ und O″ selbst heissen projektivisch, weil sie mit einem und demselben Vielstrahl O perspektivisch liegen.

Zugleich bemerkt man aber, dass die Scheitel O′ und O″ der projektivischen Vielstrahlen, und die Convergenzpunkte A″, Q, B′ und E von vier Paaren ihrer homologen Strahlen ein Sechseck bilden, in welchem die Convergenzpunkte E′, E″ und O ihrer Gegenseiten in einer geraden Linie liegen, und dass diese Lage eine nothwendige ist.

Man kann diesen Satz aber auch umkehren. Wenn nämlich A″O′EO″B′Q ein Sechseck ist, in welchem die Gegenseiten in drei Punkten E′, O und E″ einer geraden Richtung convergiren, so bildet eben diese Richtung E′E″ mit den in O convergirenden Strahlenrichtungen O′O″ und OO′ einen Dreistrahl, welcher die Seiten QA″ und QB′ conform theilen wird (§. 29). Es ist also QB″E″A″ $\barwedge$ QB′E′A′, folglich sind auch die Vielstrahlen O′, QB′E′A′ und O, QB″E″A″ conform (§. 30); sie befinden sich aber nicht in perspektivischer Lage, weil ihre Scheitellinie nicht homolog ist.

Ist ferner QD′EC″ ein Viereck (Fig. 16), dessen Gegenseiten in den Punkten E′ und E″ convergiren, und nimmt man nun auf der Diagonale E′E″ den Punkt O beliebig und zieht durch

denselben noch die Strahlen $D'D''$ und $C'C''$, so entsteht in O ein Dreistrahl, der die Geraden QD' und QC'' conform in perspektivischer Lage theilt. Es ist also $Q'D'E'C' \barwedge Q''D''E''C''$, folglich Vielstrahl C'', $Q'D'E'C' \barwedge D'$, $Q''D''E''C''$. Diese Vielstrahlen sind aber in projektivischer Lage, weil die in der Scheitellinie $D'C''$ nicht unter sich, sondern mit den Strahlen $C''C'$ und $D'D''$ homolog sind.

Man kann aber diesen Satz auch umkehren, und sagen, wenn man in dem Viereck $QD'OC''$ zu den Dreistrahlen D und C'', welche durch die anliegenden Seiten und die Diagonale $D'C''$ gebildet werden, zwei weitere Strahlen der projektivischen Lage zieht, so dass sie den auf der Scheitellinie vereinigten Strahlen homolog sind, so convergiren diese Strahlen mit einem Punkt der Geraden, welche die Convergenzpunkte E' und E'' der gegenüberstehenden Ecken verbindet. Denn aus der projektivischen Lage folgt die Conformität der Punktreihen $Q'D'E'C'$ und $Q''D''E''C''$, welche überdiess, wegen der homologen Punkte in Q, perspektivisch liegen. Es müssen also $D'D''$ und $C'C''$ mit $E'E''$ in einem Punkte O convergiren.

Auch wenn man von irgend zwei conformen projektivischen Vielstrahlen C'' und D' ausgeht, wo ausser zwei homologen Strahlenpaaren, die in zwei Punkten Q und E convergiren, noch die Strahlenpaare gegeben sind, deren eines auf der Scheitellinie liegt, so folgt auf demselben Wege, dass die Strahlen $C'C''$ und $D'D''$ in einem solchen Punkte O convergiren, der auf der Verbindungslinie der Convergenzpunkte E' und E'' des von den zwei ersten Strahlenpaaren gebildeten Vierecks liegt.

Da nun der Punkt O beliebig auf $E'E''$ genommen werden kann, so kann man ihn auch so nehmen, dass er zugleich auf der Richtung der dritten Diagonale liegt. Diesen besonderen Fall stellt die Fig. 32 dar. In dem Viereck ABCD, dessen Gegenseiten in den Punkten F und E convergiren, ist auf F E der Punkt O'' so genommen, dass er zugleich auf der Richtung der Diagonale AC liegt, folglich sind nach dem Vor-

ausgehenden die Vielstrahlen D, AFBO'' und B, AE O'' D conform in projektivischer Lage, sie sind aber auch, weil A, CO in gerader Richtung liegen, conform in perspektivischer Lage, so dass D, AFBO'' ⊼ B, AEDO''. Diese doppelte Conformität ist nur möglich, wenn die Vierstrahlen harmonisch sind, wie oben bei 38, d gezeigt wurde.

Die Diagonale AC wird also durch die zwei andern Diagonalen in den Punkten O' und O'' harmonisch getheilt, so wie EF in den Punkten O'' und O' und BD in den Punkten O' und O.

Drittes Buch.

Collineation.

A. Begriff und Entwickelung der Collineation.

§. 42. Die geradlinige Punktreihe und der ebene Vielstrahl heissen Gebilde der ersten Stufe oder einförmige Grundgebilde.

Ebene Figuren, die, wie die Vielecke, oder wie die Curven in ihren Tangenten und Sekanten viele einförmige Grundgebilde einschliessen, heissen ebene Systeme oder Gebilde der zweiten Stufe.

Will man ebene Systeme auf einander beziehen, so muss zu jedem Punkt des einen Systems ein homologer Punkt des andern Systems bestimmt werden, jeder Linie des einen Systems als einer stetigen Aufeinanderfolge von Punkten, wird eben damit auch eine homologe Linie entsprechen, welche die Punkte einschliesst, die jenen homolog sind. Wird nun die Beziehung so vollzogen, dass jedem einförmigen Grundgebilde des einen System, wieder ein einförmiges und zwar ein conformes Grundgebilde im zweiten System homolog ist, so heissen die ebenen Systeme collineär.

Der Begriff der Collineation schliesst also folgende Momente ein:

a) Jedem Punkt des einen Systems entspricht ein einziger Punkt des zweiten Systems.

b) Jeder geraden Richtung des einen Systems entspricht eine gerade Richtung des anderen Systems; und jeder Curve des einen Systems entspricht eine Curve im zweiten System.

c) Wenn in einem System eine gerade Richtung durch einen Punkt geht, so geht auch im andern System die homologe gerade Richtung durch den homologen Punkt.

d) In zwei collineären Systemen sind zwei gerade Richtungen mit

einander homolog, wenn zwei Punkte der einen Geraden zweien Punkten der andern Geraden homolog sind.

e) In zwei collineären Systemen sind zwei Punkte einander homolog, wenn in dem einen Punkt des einen Systems zwei Richtungen convergiren, welche mit zwei Richtungen homolog sind, die in dem andern Punkt des andern Systems convergiren.

f) Liegen mehrere Punkte des einen Systems in einer geraden Richtung, so liegen auch ihre homologen Punkte des collineären Systems in einer geraden Richtung, und solche homologen geradlinigen Punktreihen sind stets conform. Umgekehrt sind Punkte zweier Richtungen homolog, wenn sie gegen drei Paare ihrer homologen Punkte conform liegen.

g) Convergiren mehrere gerade Richtungen in einem Punkt, so convergiren auch die homologen Richtungen eines collineären Systems in einem Punkt; und solche homologe Vielstrahlen zweier collineären Systeme sind stets conform.

§. 43. Die collineäre Beziehung zweier ebenen Systeme ist bestimmt, wenn zwei Paare einförmiger Grundgebilde in denselben gegeben sind, also

a) Wenn in dem einen System zwei Vielstrahlen P und Q und in dem anderen System die homologen Vielstrahlen P′ und Q′ gegeben sind, oder, was hiermit übereinstimmt, wenn in den zwei collineären Systemen zwei homologe Vierseite gegeben sind.

b) Wenn in dem einen System zwei Punktreihen, a und b, und in dem andern System die homologen Punktreihen a′ und b′ gegeben sind, oder was hiermit übereinstimmt, wenn zwei homologe Vierecke gegeben sind.

Sobald also zwei homologe Vierseite, oder zwei homologe Vierecke gegeben sind, so kann man zu jedem beliebigen Punkt des einen Systems den homologen Punkt des andern Systems, und zu jeder Richtung des einen Systems die homologe Richtung des andern Systems construiren.

§. 44. In zwei collinearen ebenen Systemen heisst die Gerade eines Systems, welche mit der unendlich entfernten Geraden des andern Systems homolog ist, die Gegenaxe jenes Systems. So hat also jedes System seine Gegenaxe.

In Betreff der Gegenaxen ist noch besonders zu merken:

a) Dass alle Geraden, welche in einem Punkt der Gegenaxe des

Systems convergiren, solchen Geraden des collinearen Systems entsprechen, welche unter sich parallel sind, und umgekehrt

b) dass Parallellinien eines ebenen Systems in einem andern collineären System stets nur solchen Geraden homolog sind, die in einem Punkt seiner Gegenaxe convergiren.

In den zwei vorausgehenden Abschnitten wurden nur einförmige Grundgebilde, nämlich Punktreihen und Vielstrahlen durch das Mittel der Conformität auf einander bezogen, nun erwächst die Aufgabe beliebige ebene Figuren, durch eben dieses Mittel mit einander in Beziehung zu setzen. In einer ebenen Figur, wie z. B. das Vieleck sich darstellt, sind aber Punkte und Richtungen vereinigt, welche nicht zu einem einförmigen Grundgebilde gehören. Man muss also jetzt zum Begriff des ebenen Systems fortschreiten, welches viele beliebige Punkte und Linien, ja gewissermassen alle möglichen Punkte und Linien, als zu einem Gesammtgebilde gehörig, zusammenfasst. Denn wenn man sich zunächst auch nur auf ein Vieleck beschränken wollte, so bieten die Diagonalen und Transversalen desselben wieder unzählige gerade Richtungen und in ihren Convergenzpunkten eine noch grössere Anzahl von Punkten dar, welche alle als zu diesem Vieleck gehörig betrachtet werden müssen. Und so ist es nun nöthig, den Begriff des ebenen Systems als die Versammlung aller zu einem Ganzen zusammengefassten Punkte, festzuhalten. Und nichts hindert, zuerst nur durch homologe Bezeichnung alle Punkte des neuen Systems in eine Beziehung zu allen Punkten des andern Systems zu setzen. Das freilich, ob auch noch weiter hin das Mittel der Conformität anwendbar sey, um diese Beziehung zu einer bestimmten und nothwendigen zu machen, das bedarf noch einer besondern Nachweisung, die vor Allem geschehen muss, wenn man die Möglichkeit der Collineation feststellen will.

Es muss also nachgewiesen werden, dass der Begriff der Collineation, wie er oben in §. 42 ausgeführt ist, nichts Widersprechendes enthält, sondern vielmehr mit sich selbst über-

einstimmt und harmonirt. Entspricht also zu dem Ende der Punkt P eines Systems dem Punkt P′ eines andern Systems (Fig. 17), so entsprechen auch alle Geraden, welche durch den Punkt P gehen, allen Geraden, welche durch den Punkt P′ gehen (§. 42, c), oder es entspricht der Vielstrahl P dem Vielstrahl P′. Da nun aber die homologen Vielstrahlen conform sein sollen, so sind also auch die Vielstrahlen P und P′ conform (§. 42, g) Diese zwei homologen Vielstrahlen P und P′ sind durch drei Paare von Strahlen vollkommen bestimmt, §. 30, es sind also durch drei Paare von Strahlen alle übrigen in nothwendiger Abhängigkeit. Damit nun aber auch andere Gerade und beliebige Punkte der Ebene in ihrer Abhängigkeit von einander erscheinen, muss man noch zu einem zweiten Paar homologer und conformer Vielstrahlen übergehen. Weil aber homologe Punkte auf homologen Linien liegen sollen (§. 42, c), so sind die Scheitel dieser Vielstrahlen Q und Q′ nur auf zwei homologen Strahlen der Vielstrahlen P und P′ zu suchen; und da somit ein Paar homologer Strahlen der Vielstrahlen Q und Q′ schon gegeben sind, so dürfen nur noch zwei andere Paare gegeben werden, damit auch die Vielstrahlen Q und Q′ in allen ihren Strahlen auf einander bezogen seyen. Es sind also ausser den Strahlen, welche in den Scheitellinien PP′ und QQ′ auf einander fallen, nur noch zwei Strahlenpaare nöthig, welche in den Punkten A und A′, B und B′ convergiren, um zwei Vielstrahlen P und Q des einen Systems vollkommen mit zwei Vielstrahlen P′ und Q′ des andern collineären Systems in bestimmte Abhängigkeit und Beziehung zu setzen. Nun ist aber leicht einzusehen, dass mit diesen zwei Paaren von homologen Vielstrahlen alle Punkte des einen Systems durch die homologen Punkte des andern Systems, und damit überhaupt alle Linien und Figuren des einen Systems durch die des anderen bestimmt sind. Denn irgend ein beliebiger weiterer Punkt C des ersten Systems ist durch die zwei Strahlen, welche in demselben convergiren, vollkommen bestimmt, diesen zwei Strahlen entsprechen zwei andere durch die ersteren vollkommen bestimmte Strahlen der Vielstrahlen P′ und Q′, und

weil die Convergenzpunkte der homologen Strahlenpaare selbst homolog sind, so ist auch der Convergenzpunkt C′ der Strahlen P′C′ und Q′C′ dem Convergenzpunkt C der Strahlen QC und PC homolog. Es entspricht also jedem Punkt C in dem ersten System nur ein einziger vollkommen bestimmter Punkt C′, in dem zweiten System. Da nun aber durch diese zwei Vielstrahlenpaare die Beziehung zwischen allen Punkten der zwei Systeme bestimmt ist, so fragt es sich, ob die auf diese Weise einander entsprechenden Punkte und Linien, auch den in §. 42 ausgesprochenen Gesetzen unterworfen sind, und zwar zunächst und hauptsächlich ob jeder geraden Richtung, die nicht durch die Scheitel der bis jezt in Betrachtung gezogenen Vielstrahlen geht, wieder eine gerade Richtung im andern System entspreche. Es fragt sich also, ob alle Punkte der Richtung AB in dem einen System gerade den Punkten der Richtung A′B′ in dem andern System entsprechen. Man bemerke aber, dass, wenn der Punkt D auf der Richtung AB liegt, der Vielstrahl

$$\text{P, AQBD} \barwedge \text{Q, APBD},$$

und weil wegen der Collineation der zwei Systeme ohnehin

$$\text{P}', \text{A}'\text{Q}'\text{B}'\text{D}' \barwedge \text{P, AQBD}$$

und

$$\text{Q}', \text{A}'\text{P}'\text{B}'\text{D}' \barwedge \text{Q, APBD}$$

folgt, dass auch $\text{P}', \text{A}'\text{Q}'\text{B}'\text{D}' \barwedge \text{Q}', \text{A}'\text{B}'\text{P}'\text{D}'$ (§. 30).

Da nun aber auf diesen letzten zwei Vielstrahlen des zweiten Systems die zwei in der Scheitellinie P′Q′ vereinigten Strahlen homolog sind, so folgt, dass sie sich in perspektivischer Lage befinden, und dass somit der Punkt D′ in gerader Richtung mit dem Punkte A′ und B′ sich befindet (§. 33, a). Man zieht hieraus den Schluss, dass, sobald drei Punkte A, B, und D des ersten Systems in einer geraden Richtung liegen, auch die homologen Punkte der andern Strahlen in gerader Richtung liegen, und dass überhaupt allen Punkten der Richtung AB nur solche Punkte im zweiten System entsprechen, die ebenfalls in einer geraden Richtung liegen; oder also, dass jeder geraden Linie des einen Systems auch nur wieder eine gerade Linie des zweiten Systems entspreche. Diess schliesst aber umgekehrt

auch wieder ein, dass eine gerade Richtung, welche durch einen Punkt geht, auch im collineären System mit einer Geraden homolog sei, die durch den homologen Punkt geht; und dass also auch der Convergenzpunkt zweier Geraden des ersten Systems dem Convergenzpunkt der homologen Geraden des zweiten Systems homolog sey, und endlich, dass alle Geraden, welche in einem Punkt convergiren, wieder mit solchen Geraden homolog seien, die in einem Punkt convergiren. Zugleich folgt aber aus obiger Deduktion, dass die homologen Punktreihen ABD... und A'B'D'... zweier homologen Geraden conform sind, da sie als die Schnittpunkte der conformen Vielstrahlen P und P' mit den geraden Richtungen AB und A'B' erscheinen (§. 30). Sind ferner R und R' beliebige homologe Vielstrahlen, so werden sie auf zwei homologen Richtungen AB und A'B' nach §. 42, e, dessen allgemeine Gültigkeit bereits nachgewiesen ist, zwei homologe Punktreihen bezeichnen, §. 42, e, f, und weil je zwei homologe Punktreihen conform sind, so müssen auch die Vielstrahlen R und R' selbst conform sein. Man sieht hieraus, dass alle Punkte und Linien, welche nach den Gesetzen der Collineation aus zwei Paaren von Vielstrahlen abgeleitet werden, selbst auch diesem Gesetze unterworfen sind, und wie also der Begriff der Collineation nichts Widersprechendes enthält, sondern wie es im Gegentheil leicht ist, in zwei ebenen Systemen zu beliebig gegebenen Punkten des einen Systems, sogleich die entsprechenden des andern Systems zu zeichnen.

Es ist noch das zu bemerken, dass die collineäre Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen schon durch vier Paare von entsprechenden Geraden bestimmt ist, weil ebendarin auch die vier Durchschnittspunkte und die zwei Diagonalen homolog sind, und nun durch die Seiten und Diagonalen, welche in zwei gegenüberstehenden Ecke zusammenstossen, zwei Dreistrahlen erscheinen, so dass in den zwei ebenen Systemen zwei Paare von Dreistrahlen, und ebendamit zwei Paare von Vielstrahlen gegeben sind.

Ebenso wenn in dem einen System vier Punkte gegeben

sind, von denen nicht drei in gerader Richtung liegen, und in einem collineären System die vier homologen Punkte, so sind auch alle Verbindungslinien dieser Punkte homolog, und man erhält wieder zwei homologe Vierseite, und eben damit zwei homologe Vielstrahlen, durch welche die Beziehung aller Punkte der Systeme vollzogen werden kann. Man kann aber auch zu den vier Paaren der gegebenen homologen Punkte, noch einen fünften zeichnen, durch Verlängerung von zwei Paaren homologer Verbindungslinien, und man hat ebendamit zwei Paare von geraden Richtungen, und auf jeder Richtung drei Paare von homologen Punkten, wodurch alle homologen Punkte der zwei Paare der Richtungen gegeben sind; so dass zu jeder Geraden, welche die Richtungen des einen Systems in zwei Punkten schneidet, die homologe Gerade, welche durch die homologen Punkte der zwei Richtungen des andern Systems geht, bestimmt ist.

Zum Schluss sollen die unendlichen Punkte zweier collineären Systeme noch in's Auge gefasst werden. Es seien AB und CD zwei Richtungen des einen Systems (Fig. 18), welche in dem Punkt P convergiren, und A'B', C'D' die zwei homologen Richtungen eines collineären Systems, welche in dem Punkt P' convergiren, so sind durch die homologen Punkte P, A, B und P', A', B' alle übrigen Punkte dieser Richtungen bestimmt, ebenso verhält es sich auf den Richtungen PCD und P'C'D. Sucht man nun auf PAB den Gegenpunkt Q zu P'A'B', und auf PCD den Gegenpunkt R zu P'C'D', so entspricht die Verbindungslinie QR des ersten Systems einer Geraden des zweiten Systems, welche zwei Punkte des unendlichen Raumes derselben verbindet, und heisst desshalb die Gegenaxe des ersten Systems. Ebenso bestimmt man auch die Gegenaxe $\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'$ des zweiten Systems. Diese Gegenaxen haben für die collineären Systeme dieselbe Bedeutung, wie die Gegenpunkte für die conformen Punktreihen.

Man wird sogleich durch Anwendung von §. 42, g schliessen, dass Gerade, welche in einem Punkte einer Gegenaxe eines Systems convergiren, mit solchen Geraden des andern Systems

homolog sind, welche in einem Punkt einer unendlich entfernten Geraden, also selbst in einem unendlich entfernten Punkte convergiren, d. h. welche einander parallel sind; und umgekehrt müssen Parallellinien des einen Systems einem Vielstrahl des collineären Systems entsprechen, dessen Scheitel auf der Gegenaxe des Systems liegt.

B. Perspektivische Lage ebener collineärer Systeme.

§. 45. In Betreff der Lage, welche zwei in einer Ebene liegenden collineären Systeme einnehmen können, sind folgende Fälle hervorzuheben:

a) Sie haben einen homologen Punkt gemein, und dann haben sie auch allemal eine homologe Richtung mit einander gemein; und umgekehrt, wenn sie eine homologe Richtung entsprechend gemein haben, so haben sie auch allemal noch einen homologen Punkt mit einander gemein.

b) Die zwei collineären Systeme haben drei nicht in einer Richtung liegende Punkte mit einander entsprechend gemein, und dann haben sie auch allemal die drei Richtungen entsprechend gemein, welche durch jene Punkte gehen.

c) Die zwei collineären Systeme haben eine gerade Richtung und auf ihr alle Punkte entsprechend gemein, und dann haben sie auch allemal noch einen Punkt und alle durch dieselben gehenden geraden Richtungen entsprechend gemein, und umgekehrt: wenn sie einen Vielstrahl, nämlich die Richtungen aller seiner Strahlen entsprechend gemein haben, so haben sie allemal auch eine Punktreihe, nämlich eine gerade Richtung und alle auf ihr liegenden Punkte entsprechend gemein.

d) Die zwei collineären Systeme haben vier Punkte, von welchen nicht drei in einer Geraden liegen, oder vier gerade Richtungen, von welchen nicht drei in einem Punkt convergiren, entsprechend gemein; dann coincidiren sie mit allen ihren homologen Punkten.

§. 46. Zwei collineäre ebene Systeme, welche eine gerade Punktreihe und einen Vielstrahl entsprechend gemein haben, heissen **perspektivisch**. Die gemeinschaftliche Punktreihe heisst Collineationsaxe, das Centrum des gemeinschaftlichen Vielstrahls heisst Collineationscentrum, und die Strahlen desselben Collineationsstrahlen.

In den perspektivisch collineären Systemen sind noch folgende Besonderheiten zu beachten:

a) Je zwei homologe Punkte solcher Systeme liegen auf einem Collineationsstrahl. Jede Gerade also, welche zwei homologe Punkte perspektivischer collineärer Systeme verbindet, geht durch das Collineationscentrum derselben.

b) Je zwei homologe Geraden zweier perspektivisch collineärer Systeme convergiren in einem Punkt ihrer Collineationsaxe.

c) Je zwei homologe gerade Punktreihen liegen perspektivisch gegen das Collineationscentrum. Je zwei Punkte, welche zugleich auf zwei homologen Geraden und auf einem Collineationsstrahl liegen, sind also homolog.

d) Je zwei homologe Vielstrahlen liegen perspektivisch gegen die Collineationsaxe. Zwei Gerade sind also homolog, wenn sie durch zwei homologe Punkte gehen, und in einem Punkt der Collineationsaxe convergiren, oder mit ihr parallel laufen.

§. 47. Das Conformitätsgesetz nimmt in den perspektivisch collineären Systemen folgende einfache Form an:

a) Auf allen Collineationsstrahlen bilden die homologen Punkte Reihen gleicher Aufeinanderfolge, entweder verlaufen nämlich diese Reihen in einstimmiger Aufeinanderfolge, oder sie verlaufen auf allen Collineationsstrahlen in entgegengesetzter Aufeinanderfolge. Zwei ebene Systeme sind also entweder perspektivisch collineär in einstimmiger Lage, oder sie sind es in entgegengesetzter Lage.

b) Die Strecke eines jeden Collineationsstrahls, welche zwischen dem Collineationscentrum und der Collineationsaxe liegt, wird durch ihre homologen Punkte anharmonisch proportional getheilt.

c) Der Modulus der anharmonisch proportionalen Theilung der Collineationsstrahlen ist für alle diese Strahlen der gleiche, und heisst desswegen der Modulus der Collineation. Umgekehrt, wenn man die Strahlen eines Vielstrahls durch eine Transversale schneidet und die Strecken, welche sie bildet, durch gleichbenannte Punkte gleicher Aufeinanderfolge und nach demselben Modulus anharmonisch und proportional theilt, so begründen sie zwei collineäre Systeme in perspektivischer Lage.

d) Die Gegenaxen zweier perspektivisch collineärer, ebener Systeme laufen der Collineationsaxe parallel, und liegen symmetrisch gegen das Centrum und die Axe. Wenn die perspektivischen Systeme in entgegengesetzter Aufeinanderfolge stehen, so liegen die Gegenaxen zwischen dem Centrum und der Axe; sind sie aber in einstimmiger Lage so liegen die Gegenaxen ausserhalb dieses Raumes, der sich zwischen dem Centrum und der Axe ausbreitet.

e) Zwei gerade Linien zweier perspektivisch collineären Systeme sind auch homolog, wenn die eine Gerade dem Collineationsstrahl parallel ist, welcher nach dem Punkt gezogen wird, in welchem die andere Gerade ihrer Gegenaxe begegnet.

Wenn zwei collineäre Systeme in einer Ebene vereinigt sind, so muss gefragt werden, in welchem Verhältniss der Lage die Punkte des einen Systems zu den Punkten des andern Systems stehen, und hiebei ist besonders darauf zu sehen, ob sie mit einigen oder mit mehreren Paaren homologer Punkte zusammen fallen. Dass sie homologe Punkte gemeinschaftlich haben können, braucht nicht bewiesen zu werden, denn man kann ja nach den Regeln des vorausgehenden Abschnitts solche collineäre Systeme construiren, indem nach §. 43 wenigstens vier Punkte, von denen nicht drei in einer Ebene liegen, beliebig angenommen werden können.

Es wird nun zunächst vorausgesetzt, dass zwei collineäre Systeme nur einen Punkt P gemeinschaftlich haben (Fig. 19), und dass PM und PN zwei Geraden des einen Systemes sind, welche in diesem Punkt convergiren, und dass A, B, C und D vier Punkte dieser Richtungen seien. Diesen Geraden des erstern Systems werden zwei andere PM' und PN' des zweiten Systems entsprechen, welche, weil der Punkt P beiden Systemen gemeinschaftlich ist, auch durch den Punkt P gehen; zugleich werden zwei Punkte A' und B' der Richtung PM' den Punkten A und B der Richtung PM entsprechen, und ebenso werden die Punkte C' und D' der Richtung PN' den Punkten C und D der Richtung PN entsprechen, da nun aber die Punktreihen homologer Richtungen einander conform sind, so wird die Reihe PAB ⊼ P A'B', weil aber diese Reihen in ihrem Convergenzpunkt P zwei homologe Punkte gemeinschaftlich haben, so liegen sie perspektivisch, und es convergiren alle ihre Projektionsstrahlen in einem und demselben Punkte Q (§. 32, a). Das Gleiche ist der Fall mit den Reihen PCD und P'C'D', es werden also auch bei ihnen alle ihre Projektionsstrahlen in einem Punkt R convergiren. Zieht man nun

die Verbindungslinie QR dieser Projektionscentra, welche die gegebenen Richtungen des ersten Systems in den Punkten M und N, und die des zweiten in M' und N' schneiden wird, so müssen auch M und M' zwei homologe Punkte der Reihen PM und PM' sein (§. 42, f). Aus demselben Grund sind auch N und N' zwei homologe Punkte der Geraden PN und PN'; folglich sind auch die Richtungen MN und M'N' zwei homologe Richtungen der zwei Systeme (§.42, d). Da nun aber die zwei homologen Richtungen zusammenfallen, so ist folglich die Richtung QR beiden Systemen entsprechend gemein, und man sieht, dass zwei collineäre Systeme, welche einen Punkt entsprechend gemeinschaftlich haben, allemal auch noch eine Richtung gemeinschaftlich haben.

Diesen Satz kann man auch umkehren, und seine Wichtigkeit gebietet, die Durchführung im Einzelnen darzuthun. Es sei PP' (Fig. 20) eine gemeinschaftliche homologe Richtung der zwei Systeme, ferner seien P, AB und Q, AB zwei Vielstrahlen des ersten Systems, welche an dieser Richtung Theil haben, und P', A'B' und Q', A'B' seien die homologen Vielstrahlen des zweiten Systems, so werden diese Vielstrahlen alle auf ihren gemeinschaftlichen Scheitellinien mit zwei homologen Strahlen auf einander fallen. Da aber nun (§. 42, g) P, ABP' $\barwedge$ P', A'B'P und auf PP' zwei homologe Strahlen zusammen fallen, so sind diese Vielstrahlen in perspektivischer Lage, und die Verbindungslinie $\alpha\beta$, welche die Convergenzpunkte ihrer homologen Strahlen enthält, ist ihre Projektionsaxe, und alle Strahlen, welche in Punkten dieser Axe convergiren, sind auch homologe Linien der zwei collineären Systeme. Das Gleiche ist der Fall mit den homologen, conformen und perspektivischen Vielstrahlen Q, ABP und Q', A'B'P', ihre Projektionsaxe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ dient ebenfalls dazu, um auch die Strahlen der Vielstrahlen Q und Q' zu finden, welche für die zwei ebenen Systeme als homolog zu betrachten sind. Nun convergiren die zwei Projektionsaxen $\alpha\beta$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in irgend einem (endlichen oder unendlichen) Punkt M. Es sind also sowohl PM und PM', als auch QM und QM' homologe Geraden der collineären Systeme, folglich decken sich

auch in M zwei homologe Punkte der zwei collineären Systeme (§. 42, e).

Es ist somit dargethan, dass zwei collineäre Systeme mit einem Paar homologer Punkte allemal auch eine homologe Richtung gemeinschaftlich haben. Nun bemerke man aber, dass jeder Punkt, wenn man Linien durch denselben zieht, der Scheitel eines Vielstrahls ist, und man wird schliessen, dass zwei collineäre Systeme, welche mit einem Paar homologer Punkte auf einander fallen, in demselben zwei homologe und darum conforme Vielstrahlen vereinigt haben; solche concentrische conforme Vielstrahlen fallen aber entweder mit keinem, mit einem oder mit zwei Paaren ihrer homologen Strahlen aufeinander (§. 31). Die collineären Systeme, welche ein Paar homologer Punkte gemeinschaftlich haben, haben allemal auch noch ein Paar homologer Richtungen gemeinschaftlich, und die zwei in dieser Richtung vereinigten Punktreihen sind conform und fallen also ebenfalls mit keinem, mit einem, oder mit zwei Paaren homologer Punkte aufeinander (§. 20). Nun ist aber das Zusammenfallen der homologen Elemente in jenen concentrischen Vielstrahlen und in diesen zwei Punktreihen von einander abhängig. Fallen in den concentrischen Vielstrahlen keine homologen Strahlen auf einander, so können auch auf der Richtung der zwei homologen Punktreihen keine zwei homologe Punkte auf einander fallen, denn wenn diess der Fall wäre, so hätte man noch einen Punkt, in welchem zwei homologe Punkte vereinigt wären, und in dem Strahl des concentrischen Vielstrahls, welcher durch diesen zweiten Punkt gezogen wurde, wären ebenfalls zwei homologe Richtungen der collineären Systeme vereinigt (§. 42, d). Aus dieser Folgerung geht aber zugleich hervor, dass, wenn auf der Richtung a, welche die homologen Reihen enthält, ein Punkt A ist, in welchem ein Paar homologer Punkte der zwei collineären Systeme vereinigt sind, dann allemal auch im concentrischen Vielstrahl P zwei homologe Strahlen sind, welche in einer Richtung P zusammenfallen, und ebenso schliesst man, dass, wenn in der

gemeinschaftlichen Richtung a zwei Punkte A und B sind, in welchen zwei Paare homologer Punkte vereinigt sind, dann allemal auch noch im Vielstrahl P zwei Strahlen p und q sind, in welchen je ein Paar homologer Strahlen vereinigt sind, und dass die Strahlen p und q gerade durch die Punkte A und B gehen. Die zwei collineären Systeme haben also in dem letzten Fall drei Punkte A, B und P, und die drei Richtungen a, p und q gemeinschaftlich, welche durch jene Punkte gehen.

Es ist noch ein Fall zu betrachten übrig, nämlich derjenige, wo drei Paare homologer Elemente der concentrischen Vielstrahlen, oder die zwei homologen Punktreihen gleicher Richtung zusammen fallen, und auch hier wird man wie oben, sogleich sehen, dass mit dem Zusammenfallen von drei Punktpaaren in den Punkten A, B, C der gemeinschaftlichen Richtung a nothwendig auch ein Zusammenfallen von drei Paaren homologer Strahlen in den Strahlenrichtungen a, b, c der concentrischen Vielstrahlen P verbunden ist. Wenn aber zwei concentrische einförmige Gebilde mit drei Paaren homologer Elemente zusammen fallen, so thun sie dasselbe mit allen Paaren ihrer homologen Elemente (§. 31). Der hier besprochene Fall kann daher auch so gefasst werden, wenn zwei collineäre Systeme mit zwei homologen Richtungen, und auf denselben mit allen ihren homologen Punkten auf einander fallen, so fallen sie zugleich auch mit zwei anderen homologen Punkten, und zugleich auch mit allen durch dieselben gehenden homologen Strahlen auf einander; oder wenn die collineären Systeme eine Punktreihe in allen ihren Punkten entsprechend gemein haben, so haben sie auch noch einen Vielstrahl und alle seine Strahlenrichtungen entsprechend gemein.

Hiemit sind aber nun die Fälle des theilweisen Ineinandergreifens zweier collineären Systeme erschöpft. Denn gesetzt, sie haben vier homologe Punkte mit einander gemein, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen, um nicht auf den vorigen Fall zurückzukommen, so sind ja durch vier Punkte alle andern Punkte des collineären Systems vollkommen

bestimmt (§. 43). Die Systeme werden also auch mit allen übrigen homologen Punktpaaren zusammenfallen. Das gleiche Resultat liefert die Annahme, dass die Systeme mit vier homologen Richtungen zusammen fallen. Unter den verschiedenen Fällen des theilweisen Zusammenfallens zweier collineären Systeme verdient der dritte, wo sie mit allen Punkten zweier homologen Punktreihen und allen Strahlen zweier homologen Vielstrahlen zugleich zusammen fallen, eine besondere Beachtung. Von solchen Systemen sagt man daher, sie seien perspektivisch, und bezeichnet mit Collineationsaxe und Collineationscentrum die Richtung und den Scheitel der Vielstrahlen der gemeinschaftlichen einförmigen Gebilde. Die Beziehungen zwischen den übrigen homologen Stücken, welche nicht zusammenfallen, sind ebenfalls bemerkenswerth. Fasst man zwei homologe Punkte A und A′ Fig. 21 dieser Art in's Auge, so wird man bemerken, wenn man die Collineationsstrahlen OA und OA′ zieht, dass diese homolog sein müssen (§. 42, d), aber auch, dass sie in einer Richtung zusammen fallen (§. 45, c), es liegen also die Punkte O, A und A′ in einer Richtung, und jede Verbindungslinie von zwei homologen Punkten der perspektivischen, collineären Systeme geht also durch das Collineationscentrum O. Fasst man ferner zwei homologe Geraden AB und A′B′ in's Auge, und bemerkt man, dass auch auf der Collineationsaxe X𝔛 zwei homologe Richtungen vereinigt sind, so wird man schliessen, dass der Convergenzpunkt von AB und X𝔛 dem Convergenzpunkt von A′B′ und X𝔛 homolog ist (§. 42. e), weil aber auf der Collineationsaxe alle homologen Punkte zusammen fallen (§. 46), so fallen also auch jene zwei Convergenzpunkte an einen Ort γ zusammen, oder die collineären Geraden convergiren in einem Punkt der Collineationsaxe. Daraus folgt aber das, was in §. 46 c und d gesagt ist, so unmittelbar, dass Jedermann es sogleich einsehen muss, und zugleich erklären diese Eigenschaften, warum dieser Fall der Collineation perspektivisch genannt wird, weil nämlich alle homologen einförmigen Gebilde derselben perspektivisch gegen einander liegen.

Auf jedem Collineationsstrahle fallen die zwei homologen Reihen in einer Richtung zusammen (§. 45, c), dagegen fallen die homologen Punkte dieser Reihen nur im Collineationscentrum und auf der Collineationsaxe zusammen, sonst fallen sie ausser einander. Da aber die homologen Reihen conform sind, so theilen ihre homologen Punkte die Strecke zwischen dem Centrum O und der Axe X𝔛 anhormonisch proportional (§. 20, d).

Ferner fallen in einem jeden Punkt γ der Collineationsaxe zwei homologe Punkte, und also auch zwei homologe Vielstralen mit ihren Scheiteln auf einander, und sind conform concentrisch, dabei decken sich von ihren homologen Strahlen zwei Paare, von welchen das eine die Richtung der Collineationsaxe X𝔛, und das andere die Richtung eines Collineationsstrahls Oγ hat. Ein solches Paar concentrischer Vielstrahlen bezeichnet aber auf allen Collineationsstrahlen die homologen Punkte derselben, und da sie alle Collineationsstrahlen conform in perspektivischer Lage theilen, so folgt, dass die homologen Reihen auf allen Collineationsstrahlen in gleicher Ordnung auf einander folgen, und die Strecken derselben zwischen dem Centrum und der Axe nach gleichem Modulus anharmonisch proportional theilen. Verlaufen also die Reihen eines Collineationsstrahls in einstimmiger Aufeinanderfolge, so geschieht dies auch auf allen andern Collineationsstrahlen, und verlaufen sie in entgegengesetzter Aufeinanderfolge, so geschieht dasselbe auch auf allen andern Collineationsstrahlen; die perspektivische Collineation befindet sich also entweder in einstimmiger Lage oder in entgegengesetzter. Da ferner die homologen Reihen O, A, F, G, 𝔞 und O, A', F', G', 𝔞 conform sind, und in O und 𝔞 zwei Paare ihrer homologen Punkte vereinigt sind, so folgt aus §. 20, d, dass die Strecke O𝔞 durch die homologen Punkte der perspektivischen collineären Systeme anharmonisch proportional getheilt wird. Sind aber P und P' zwei homologe Punkte eines andern Collineationsstrahls, so convergiren AP und A'P' in einem Punkt γ der Axe, und es werden die Transversalen O𝔞 und O𝔭 des Vierstrahls γ, OA𝔞A' conform getheilt, so dass

$$\frac{\mathfrak{a}A}{AO} : \frac{\mathfrak{a}A'}{A'O} = \frac{\mathfrak{p}P}{PO} : \frac{\mathfrak{p}P'}{P'O}, \text{ §. 29.}$$

Der Modulus der anharmonischen Theilung des Strahls $O\mathfrak{p}$ ist also demjenigen des Strahles $O\mathfrak{a}$ gleich. Alle Collineationsstrahlen werden durch ihre homologen Punkte nach demselben Modulus anharmonisch proportional getheilt.

Die Lage der Gegenaxen kann aus der Lage der Gegenpunkte der Collineationsstrahlen erkannt werden. Ist $\mathfrak{A}$ ein Gegenpunkt der zwei Reihen (Fig. 22), welche auf dem Collineationsstrahl $O\mathfrak{a}$ vereinigt sind, so ist er ein Punkt der Gegenaxe, und weil der homologe Punkt $\mathfrak{A}'$ der unendlich entfernte Punkt der Richtung $O\mathfrak{a}$ ist, so ist der Modulus der Collineation $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}O} : \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}'O} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}O}$. Die Gegenaxe, welche durch diesen Punkt $\mathfrak{A}$ geht, muss mit ihrer homologen Geraden des unendlichen Raumes in einem Punkt der Collineationsaxe $X\mathfrak{X}$ convergiren, der ebenfalls nur ein Punkt des unendlichen Raumes sein kann; folglich muss die Gegenaxe mit der Collineationsaxe parallel laufen. Die Gegenaxe, welche zum System des Punktes A′ gehört, theilt die Collineationsstrahlen in demselben nur reciprok genommenen Verhältniss, und es haben die zwei Gegenaxen gegen das Collineationscentrum und die Collineationsaxe eine symmetrische Lage. Diess folgt sogleich aus §. 12, b.

Die Collineationsaxen sind leicht zu zeichnen, wenn zwei collineäre Punkte A und A′ gegeben sind. Zeichnet man zwei homologe Geraden $A\alpha$ und $A'\alpha$ und zieht einen Collineationsstrahl $O\mathfrak{b} \parallel \alpha A'$, so bezeichnet er auf αA den Punkt $\mathfrak{B}$, welcher demjenigen Punkt der Geraden $\alpha A'$ homolog ist, der in unendlicher Entfernung liegt (§. 46, c). Es ist also $\mathfrak{B}$ ein Punkt der Gegenaxe des Systemes des Punktes A. Zieht man aber den Collineationsstrahl $\parallel \alpha A$, so begegnet er der Geraden $A'\alpha$ in dem Gegenpunkt $\mathfrak{C}'$, der Gegenaxe des Systemes des Punktes A′. Umgekehrt kann man, wenn die Gegenaxen gegeben sind, zu einer Geraden αA die homologe Gerade finden, wenn man den Punkt $\mathfrak{B}$ bestimmt, in welchem diese Gerade

der Gegenaxe des Systems des Punktes A begegnet, und nun $A'\alpha \parallel O\mathfrak{B}$ zieht, denn nun werden $A\alpha$ und $A'\alpha$ homolog sein.

C. Involutorische Collineationssysteme.

§. 48. Collineationssysteme heissen involutorisch, wenn sie die Eigenschaft haben, dass je zwei nicht homologe Punkte derselben, welche an einem Ort zusammenfallen, wieder zwei solchen Punkten entsprechen, die auf einander fallen. Solche involutorische Collineationssysteme sind stets auch perspektivisch, und stellen also einen besondern Fall der perspektivischen Collineationssysteme dar, und zwar einen Fall, der noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet ist:

a) Die zwei homologen Reihen, welche auf einem Collineationsstrahl vereinigt sind, bilden eine Involution. Das Collineationscentrum und der Schnittpunkt mit der Collineationsaxe bilden die Hauptpunkte der Involution.

b) Der Modulus der Collineation involutorischer Systeme ist gleich Eins. Jeder Collineationsstrahl wird durch die zwei homologen Reihen, welche in ihm vereinigt sind, harmonisch getheilt.

c) Die zwei Gegenaxen zweier involutorischer Collineationssysteme fallen in eine Richtung zusammen, welche in der Mitte zwischen der Collineationsaxe und dem Collineationscentrum liegt.

d) Wenn man in involutorischen Systemen zwei Paare homologer Punkte wechselseitig mit einander verbindet, so convergiren auch die zwei Verbindungslinien der nicht homologen Punkte in einem Punkt der Collineationsaxe.

So oft eines dieser Merkmale stattfindet, so gehört die perspektivische Collineation zum besondern Fall der Involution.

In zwei perspektivischen Collineationssystemen sind auf jedem Collineationsstrahl zwei homologe Punktreihen so vereinigt, dass sie mit zwei Paaren homologer Punkte auf einander fallen; das eine dieser Punktpaare befindet sich im Collineationscentrum, das andere in dem Punkt, in welchem der Collineationsstrahl von der Collineationsaxe geschnitten wird; die andern homologen Punkte der zwei Reihen theilen die zwischen jenen zwei Hauptpunkten liegende Strecke anharmonisch proportional, und zwar hat der Modulus der anharmonisch proportionalen Theilung auf allen Collineationsstrahlen

denselben Werth, §. 27. Der ganze Unterschied, welcher sich bei den verschieden perspektivischen Collineationen noch wahrnehmen lässt, beruht neben der Entfernung des Collineationscentrums von der Collineationsaxe, auf dem Modulus der Collineation. Der besondere Fall, wo dieser Modulus den Werth Eins annimmt, ist dadurch ausgezeichnet, dass alle Collineationsstrahlen durch die in ihnen vereinigten Punktreihen eine harmonische Theilung erleiden, oder, was hiemit gleichbedeutend ist, dass sie eine Involution bilden (§. 24). Damit ist also sogleich das verbunden, dass zwei Punkte A und C′ der Systeme, Fig. 23, welche an einem Ort der Ebene vereinigt sind, wieder mit zwei solchen Punkten A′ und C homolog sind, die an einem andern Ort desselben Collineationsstrahls vereinigt sind. Das Merkmal der Involution ist also auf alle Punkte der Collineationssysteme ausgedehnt, und die Systeme heissen desshalb involutorisch. Auf jedem Collineationsstrahl fallen jetzt die zwei Gegenpunkte an einem Ort 𝔄′ zusammen, welcher die Strecke zwischen den zwei Hauptpunkten halbirt, und bilden einen Centralpunkt der Involution, §. 24; es fallen also auch die zwei Gegenaxen der involutorischen Systeme in eine Richtung M𝔐 zusammen, welche mit der Axe parallel läuft und in der Mitte zwischen dem Centrum und der Axe liegt. Betrachtet man nun aber auf zwei Collineationsstrahlen zwei Paare von homologen Punkten A und A′, B und B′, so sind AB und A′B′ zwei homologe Gerade, welche an einem Punkt α der Collineationsaxe convergiren. Es fällt aber der Punkt A mit einem ungleichnamigen Punkt C′ des zweiten Systems zusammen, welcher einem Punkt C des ersten Systems homolog ist, der seinerseits mit A zusammenfällt; ebenso ist der Punkt B des ersten Systems mit einem Punkt D′ des zweiten Systems verbunden, der einem Punkt D des ersten Systems entspricht, welcher mit B′ vereinigt ist. Es sind also auch BC und B′C′ zwei homologe Gerade der zwei involutorischen Systeme, und es werden auch diese Geraden in einem Punkt γ der Collineationsaxe convergiren. Bezeichnet man aber diese Oerter mit den anderen Punkten die in denselben

sich befinden, so können dieselben Geraden auch mit AB′ und A′B bezeichnet werden, und sie erscheinen somit als die ungleichnamigen Verbindungslinien der homologen Paare. Es ist daher eine mit dem Wesen der involutorischen Systeme verbundene Eigenschaft, dass auch die Geraden, welche die ungleichnamigen Punkte zweier homologen Punktpaare verbinden, in einem Punkt der Collineationsaxe convergiren, und dass auch sie in Wirklichkeit doch homolog sind.

Man kann alle diese Sätze auch umkehren, und namentlich auch zeigen, dass der Begriff der involutorischen Systeme von selbst zu dem der perspektivischen zurückführt. Sollen nämlich alle Punkte zweier collineären Systeme in Involution stehen, so müssen je zwei homologe Punkte A und A′ wieder mit zwei homologen Punkten C′ und C zusammen fallen. Ebendamit ist aber auch ausgesprochen, dass die Gerade AC des einen Systems mit der Geraden A′C′ des andern Systems homolog ist, oder also, dass in der Verbindungslinie jedes Paares homologer Punkte, zwei homologe Richtungen vereinigt sind. Es decken sich also jedenfalls auf der Verbindungslinie jedes Paares der homologen Punkte stets auch zwei homologe Richtungen. Die Systeme haben also unzählig viele Richtungen gemeinschaftlich; diess ist aber, wenn die Systeme sich nicht in allen ihren Punkten decken sollen (§. 45, d), nur dann möglich, wenn sie alle in einem Punkt convergiren (§. 45, c), dann haben sie aber auch alle Punkte einer Geraden entsprechend gemeinschaftlich und sind perspektivisch.

D. Uebertragung der Collineation.

§. 49. Sind zwei ebene Systeme einem dritten ebenen System collineär, so sind sie auch unter sich collineär. Liegen aber von drei collineären Systemen zwei gegen das dritte perspektivisch, so sind sie darum noch nicht perspektivisch unter einander. Hierzu ist noch erforderlich, dass alle drei Systeme einen und denselben Vielstrahl, nämlich alle Richtungen seiner Strahlen, oder eine und dieselbe Punktreihe, nämlich alle Punkte derselben, entsprechend gemein haben. Es gibt daher zwei Fälle der perspektivischen Lage dreier collineären Systeme.

a) Wenn zwei Systeme mit einem dritten System collineär sind und einen und denselben Vielstrahl, den Collineationsvielstrahl, mit demselben entsprechend gemein haben, so befinden sie sich auch gegen einander in perspektivischer Lage, und ihre drei Collineationsaxen decken sich entweder, oder, wenn das nicht der Fall ist, so convergiren sie doch in einem einzigen Punkt.

b) Wenn zwei Systeme mit einem dritten System collineär sind, und eine und dieselbe Punktreihe, ihre Collineationsaxe, mit demselben entsprechend gemein haben, so befinden sie sich auch gegen einander in perspektivischer Lage, und ihre drei Collineationscentra fallen entweder auf einander, oder, wenn das nicht der Fall ist, so liegen sie doch in einer geraden Richtung.

Nachdem nun zwei Collineationssysteme in ihrer gegenseitigen Lage zu einander bis zu dem besondern Fall der Involutionssysteme erörtert worden sind, muss noch die Lage solcher Systeme, wenn eine grössere Zahl derselben in Betracht kommt, mit ein Paar Worten besprochen werden. Eine Anzahl von drei Systemen kann jedoch hiebei genügen, weil mit dem Verhalten von drei Systemen auch das einer grösseren Zahl gegeben ist.

Zunächst folgt schon aus dem Begriff der Collineation, dass zwei Systeme, welche mit einem dritten System collineär sind, auch unter einander collineär sein müssen. Denn mit dem Begriff der Collineation ist ja nichts ausgesagt, als dass alle ihre homologen einförmigen Grundgebilde conform seien, und die Conformität befolgt ja das Gesetz, dass zwei Gebilde, welche einem dritten conform sind, es auch unter sich sind. Die Collineation muss daher ebenfalls an dieser Eigenschaft Theil nehmen.

Anders verhält es sich mit dem Uebertragen der Lage, wie diess auch schon bei einförmigen Grundgebilden zu bemerken war. Recht gut kann ein System X mit einem collineären System V einen Vielstrahl P, und mit einem andern System W einen andern Vielstrahl Q ebenfalls entsprechend gemein haben, ohne dass V und W unter einander einen Vielstrahl entsprechend gemein haben; dann sind die

Systeme V und W zugleich mit dem System X in perspektivischer Lage, ohne es unter einander zu sein. Haben aber alle drei Systeme einen und denselben Vielstrahl P mit einander entsprechend gemein, so sind sie auch alle drei in perspektivischer Lage gegen einander, und jedes Paar der drei perspektivischen Systeme hat auch eine Punktreihe, nämlich ihre Collineationsaxe entsprechend gemein. Es kommen aber drei Collineationsaxen in Betracht, da jedes Paar der collineären Systeme eine solche hat. Aber ganz beliebig ist die Lage dieser drei Collineationsaxen doch nicht. Der Punkt, in welchem zwei dieser Collineationsaxen convergiren, ist nämlich offenbar ein Punkt, in welchem drei Punkte der drei Systeme aufeinander fallen, da jeder Punkt einer Collineationsaxe schon zwei homologe Punkte der zwei angehörigen Systeme in sich vereinigt. Der Convergenzpunkt zweier Collineationsaxen ist also zugleich auch ein Punkt der dritten Collineationsaxe, oder alle drei Collineationsaxen der drei Systeme convergiren in einem und demselben Punkt. Ganz zusammen fallen können aber die drei Collineationsaxen der drei Systeme wohl auch, man hat dann auf jedem Collineationsstrahl drei Punktreihen, von welchen je zwei Reihen die Strecke zwischen dem Centrum und der Axe anharmonisch proportional theilen; dass dies ausführbar ist, sieht man leicht dadurch, dass zwei Doppelverhältnisse, welche einem dritten gleich sind, es auch unter sich sind.

Ein zweiter Fall der perspektivischen Lage dreier collineären Systeme ergibt sich, wenn die Systeme eine und dieselbe Punktreihe, nämlich alle in derselben liegenden Punkte entsprechend gemein haben. Je zwei dieser Systeme haben auch einen Vielstrahl entsprechend gemein (§. 45, c) und sind also perspektivisch. Die Scheitel dieser Vielstrahlen sind aber ebenfalls in ihrer Lage nicht ganz beliebig. In den Scheitellinien zweier dieser Vielstrahlen sind jedenfalls drei homologe Strahlen der drei Systeme vereinigt; da auf jedem Strahl eines solchen Vielstrahls schon zwei homologe Strahlen der zwei betreffenden Systeme vereinigt sind. Sofern also die Scheitel-

linie durch das Collineationscentrum der Systeme V und X geht, sind zwei homologe Strahlen dieser Systeme in ihm vereinigt, und so fern es auch durch das Collineationscentrum der Systeme W und X geht, ist auch obiger Strahl des Systems X mit einem homologen Strahl des Systemes W vereinigt; es enthält also wirklich die Verbindungslinie der zwei Centra auch schon einen homologen Strahl des dritten Collineationsvielstrahls, und es fallen also drei homologe Strahlen der drei Collineationsvielstrahlen in eine Richtung zusammen, oder, was hiemit gleichbedeutend ist, die drei Collineationscentra der paarweise perspektivischen Systeme liegen nothwendig in einer geraden Richtung. Dass in besonderen Fällen die drei Centra aber auch in einem Punkt vereinigt sein können, ist schon oben ausgesprochen.

E. Arten der Collineation.

§. 50. Die Collineation heisst Affinität, wenn die Conformität aller homologen Punktreihen zum besondern Fall der Proportionalität gehört; wenn also die homologen Punktreihen zweier Systeme proportional sind, d. i. wenn auf je zwei homologen Punktreihen die homologen Abschnitte ein constantes Verhältniss zu einander haben.

Die Collineation heisst Aehnlichkeit, wenn nicht nur jede zwei homologe Punktreihen proportional sind, sondern, wenn überdiess das Verhältniss der homologen Abschnitte auf allen homologen Richtungen dasselbe ist, so dass also überhaupt alle homologen Abschnitte in Proportion stehen.

Die Collineation heisst Uniformität, wenn das Verhältniss der homologen Abschnitte auf allen Richtungen den Werth Eins hat, oder was dasselbe ist, wenn jede zwei homologen Abschnitte einander gleich sind.

§. 51. Diese drei besonderen Arten der Collineation: Affinität, Aehnlichkeit und Uniformität, haben noch folgende Merkmale gemeinschaftlich:

a) Die zwei Gegenaxen liegen in unendlichem Raum.

b) Alle Parallelen des einen Systems sind wieder mit parallelen Geraden des andern Systems homolog.

c) Zwei übrigens beliebige homologe Figuren der zwei Systeme haben nur gleichartige Dimensionen. Entweder sind nämlich alle ihre Dimensionen von endlicher Grösse, oder wenn die eine Figur unend-

liche Dimensionen hat, so hat auch die homologe Figur des andern Systems solche unendliche Dimensionen.

Die Aehnlichkeit und Uniformität haben auch noch ein weiteres Merkmal gemeinschaftlich, durch welches sie sich von der Affinität unterscheiden. Diess besteht darin, dass je zwei homologe Vielstrahlen der ähnlichen und uniformen Systeme einander gleich sind, so dass die Winkel einander gleich sin , welche zwischen zwei Paaren homologer Richtungen liegen.

Die homologen Figuren ähnlicher Systeme heissen ähnlich, und die homologen Figuren uniformer Systeme heissen congruent.

§. 52. In den perspektivischen affinen Systemen sind nochfolgende Merkmale von Wichtigkeit:

a) Das Collineationscentrum liegt im unendlichen Raum, die Collineationsaxe dagegen liegt im endlichen Raum.

b) Die homologen Punkte der zwei Systeme bilden eine proportionale Umhüllung der Collineationsaxe. Es hat nämlich das Verhältniss der zwei Abschnitte eines Collineationsstrahls, welche zwischen zwei homologen Punkten und der Collineationsaxe liegen, auf allen Collineationsstrahlen ein constantes Verhältniss, und dieses Verhältniss ist dem Modulus der Collineation gleich.

c) Die Flächenräume zweier homologer Figuren affiner Systeme haben ebenfalls ein constantes Verhältniss zu einander, und auch ihr Verhältniss ist dem Modulus der Collineation gleich.

§. 53. Die perspektivischen, ähnlichen Systeme sind noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Ihre Collineationsaxe liegt im unendlichen Raum, dagegen liegt ihr Collineationscentrum im endlichen Raum.

b) Zwei homologe Geraden sind parallel.

c) Die homologen Punkte der zwei Systeme bilden eine proportionale Umhüllung des Collineationscentrums. Es hat nämlich das Verhältniss der zwei Abschnitte eines Collineationsstrahls, welche zwischen zwei homologen Punkten und dem Collineationscentrum liegen, auf allen Collineationsstrahlen ein constantes Verhältniss, und dieses Verhältniss ist dem Modulus der Collineation gleich.

d) Die Flächenräume zweier homologen Figuren ähnlicher Systeme haben ein constantes Verhältniss zu einander, welches dem Quadrat des Modulus gleich ist.

§. 54. Sowohl die Aehnlichkeit, als auch die Affinität kann in Uniformität übergehen.

a) Die perspektivische Affinität entgegengesetzter Lage wird zur Uniformität, wenn die Collineationsstrahlen auf der Collineationsaxe senkrecht stehen, und zugleich der Modulus der Affinität gleich Eins ist.

b) Die perspektivische Aehnlichkeit entgegengesetzter Lage wird zur Uniformität, wenn ihr Modulus gleich Eins.

c) Ausserdem existirt noch ein Fall der Uniformität, der dann eintritt, wenn die Collineationsaxe und das Collineationscentrum zugleich im unendlichen Raum liegen.

In uniformen Systemen ist der Modulus der Collineation gleich Eins, und homologe Flächen solcher Systeme sind einander gleich.

Wenn man nach den besonderen Arten der Collineation fragt, so muss man die homologen einförmigen Grundgebilde, aus welchen dieselben zusammengesetzt sind, in's Auge fassen, und ihre Abhängigkeit von einander zu ermitteln suchen. Nun sind zwar in zwei collineären Systemen zwei homologe Grundgebilde stets conform, aber zwei conforme Punktreihen können auch proportional oder selbst uniform sein, und zwei conforme Vielstrahlen können auch gleich sein.

Sind nun zwei Paare homologer Punktreihen proportional, so sind die unendlich entfernten Punkte der zwei Geraden des ersten Systems, wieder den unendlich entfernten Punkten der zwei homologen Geraden des zweiten Systems homolog (§. 18), es ist daher auch eine unendlich entfernte Gerade des ersten Systems wieder einer unendlich entfernten Geraden des zweiten Systems homolog (§. 42, d). Das heisst die Gegenaxen der zwei Systeme liegen im unendlichen Raum. Diese zwei homologen Geraden des unendlichen Raumes convergiren mit allen homologen Geraden des endlichen Raumes in homologen Punkten, folglich sind auch auf allen andern homologen Geraden der zwei collineären Systeme die unendlich entfernten Punkte homolog, und folglich sind auch die Punktreihen solcher Richtungen proportional. Man sieht, dass, wenn in zwei collineären Systemen zwei Paare von homologen Punktreihen proportional sind, überhaupt alle homologen Punktreihen der zwei Systeme proportional, und dass solche Systeme affin sind. Affine Systeme sind durch zwei homologe Dreiecke ABC und

A′B′C′, Fig. 25, die in denselben gegeben sind, bestimmt, da die Proportionalität zweier homologen Richtungen durch zwei homologe Punkte bestimmt ist. Zu jedem weiteren Punkt D auf einer Richtung AB existirt allemal nur ein einziger Punkt D′ auf A′B′, welcher so liegt, dass ABD und A′B′D′ proportionale Reihen sind, d. h., dass AB : A′B′ = BD : B′D′. Man kann also auf den homologen Richtungen der Seiten dieser Dreiecke beliebige weitere homologe Punkte aufsuchen, und die Verbindungslinien homologer Punktepaare liefern wieder neue homologe Richtungen, diese führen wieder zu weiteren homologen Punkten etc., und die Punktreihen, welche durch die Convergenzpunkte der homologen Richtungen construirt werden, sind auf allen homologen Richtungen immer wieder proportional.

In den affinen Systemen sind demnach die homologen Abschnitte, welche auf zwei homologen Richtungen liegen, proportional, wenn man also zwei Paare von homologen Abschnitten auf homologen Richtungen aufsucht, so stehen sie jenen in Proportion, und es ist AB : A′B′ = BD : B′D′ = . . . Das Verhältniss, welches zwischen den Abschnitten zweier andern homologen Richtungen (etwa auf BC und B′C′) herrscht, ist aber von jenem nicht abhängig. Setzt man nun aber voraus, dass in zwei affinen Systemen das Verhältniss der homologen Abschnitte auf drei verschiedenen Paaren homologer Richtungen AB und A′B′, BC und B′C′, AC und A′C′ denselben Werth habe, Fig. 24, so dass AB : A′B′ = BC : B′C′ = AC : A′C′, so äussert dieser Umstand eine Wirkung auf alle andern Punktreihen aus. Denn einmal lehren die Elemente der Geometrie, dass unter diesen Umständen $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ etc., und wenn sodann D und D′, E und E′ noch zwei andere homologe Punkte dieser Richtungen sind, so ist auch

$$AB : A'B' = AD : A'D'$$
$$AC : A'C' = AE : A'E',$$

folglich weil AB : A′B′ = AC : A′C′ nach Annahme;
auch AD : A′D′ = AE : A′E′,

und da überdiess auch $\angle A = \angle A'$, so ist $\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$ und folglich $DE : D'E' = AD : A'D' = AB : A'B' =$ etc.

Solche Systeme sind ähnlich. Man sieht hieraus, dass in diesen zwei ähnlichen Systemen auch die homologen Abschnitte aller beliebigen homologen Richtungen einander proportional sind, während in den specifisch affinen Systemen auf allen verschiedenen homologen Richtungen der Proportionalität ihrer Punktreihen verschiedene Verhältnisse zu Grunde liegen. Es ist kaum nöthig zu sagen, dass, wenn in zwei ähnlichen Systemen zwei homologe Abschnitte einander gleich sind, auch alle übrigen homologen Abschnitte einander gleich sein müssen, da das Verhältniss der Proportionalität auf allen Richtungen dasselbe ist.

Die Aehnlichkeit schliesst, wie schon aus obiger Definition hervorgeht, noch ein zweites Merkmal ein, dass nämlich zwei Winkel einander gleich sind, welche zwischen zwei Paaren homologer Richtungen liegen. Sind A und A′, B und B′, C und C′ drei Paare homologer Punkte ähnlicher Systeme, so folgt aus dem Begriff der Aehnlichkeit, dass $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$ und hieraus folgt nach den Elementen der Geometrie, dass $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ und $\angle C = \angle C'$. Diess führt aber unmittelbar zu dem weiteren Schluss, dass in ähnlichen Systemen alle homologen Vielstrahlen einander gleich sind. An dieser Eigenschaft nehmen auch die uniformen Systeme Theil, weil sie nur einen besonderen Fall der homologen Systeme darstellen. Dieses Merkmal kommt den affinen Systemen als solchen nicht zu. Dagegen stimmen alle drei Arten der Collineation darin mit einander überein, dass ihre homologen Punktreihen conform sind, und also auch darin, dass die zwei Gegenaxen im unendlichen Raum liegen. Hieraus folgt unmittelbar, dass parallele Geraden des einen Systems wieder parallele Geraden in einem affinen oder ähnlichen System zum homologen Aequivalent haben; da parallele Geraden solche sind, die in einem Punkt der unendlich entfernten Gegenaxe convergiren. Ebenso, hat irgend eine Figur einen oder mehrere Punkte im unendlichen Raum, d. h. auf der

Gegenaxe dieses Systems, so muss auch die affine und ähnliche Figur die homologen Punkte auf der Gegenaxe haben, da die Gegenaxen homolog sind. Solche Systeme haben also gleichartige Dimensionen in dem oben ausgesprochenen Sinne.

Es wird nicht ohne Interesse sein, noch vor der Betrachtung der perspektiven Lage dieser besonderen Collineationssysteme einen Blick auf die ähnlichen und congruenten Figuren zu werfen, und die hier gewonnenen Begriffe mit denen zu vergleichen, welche die Elemente der Geometrie gewöhnlich festhält. In den Elementen der Geometrie werden nämlich zwei verschiedenartige Merkmale bei diesen Begriffsbestimmungen festgehalten, das Verhältniss der Seiten und die Gleichheit der homologen Winkel, dagegen wurden hier nur die Verhältnisse der Seiten zu demselben Zweck gebraucht, während die Gleichheit der Winkel als eine Folge der ersten erschien. In der That ist jedes der zwei Merkmale allein schon für die ähnlichen Figuren ausreichend; für die Congruenz ist aber die Gleichheit der homologen Seiten neben der Gleichheit der Winkel zu berücksichtigen. Dieser Umstand schon zeigt, dass das Moment der Proportionalität der homologen Seiten das durchgreifende und leitende ist, und diese Bemerkung wird zur Evidenz erhoben, sobald man die Affinität ebenfalls mit in Erwägung zieht. Denn dort bleibt die Proportionalität der Seiten als das einzige Mittel allein übrig. Will man also die Figuren nach ihrer Gestaltsverwandtschaft mit einander vergleichen und wie die Logik es verlangt, einen einzigen Eintheilungsgrund festhalten, so ist der hier eingeschlagene Weg der einzige berechtigte. Dass bei den Dreiecken dieses Merkmal allein schon ausreichend ist, weiss Jedermann. Man glaube aber nicht, dass es bei den Vielecken nicht mehr ausreicht. Dieser Irrthum kann sich nur da einstellen, wo man die Diagonalen von den Seiten unzweckmässig trennt. Betrachtet man aber alle Verbindungslinien der Ecken als Seiten, so sind auch die Vielecke ähnlich, so oft alle ihre Seiten in Proportion stehen, und die Gleichheit der homologen Winkel ist eine

Folge der Proportionalität der Seiten. Es ergeben sich also folgende Begriffsbestimmungen:

Vielecke sind affin, wenn je zwei homologe Seiten durch die übrigen Seiten proportional getheilt werden;

Vielecke sind ähnlich, wenn der Proportionalität aller homologen Richtungen dasselbe Verhältniss zu Grunde liegt.

Vielecke sind congruent, wenn das gemeinschaftliche Verhältniss der Proportionalität gleich Eins ist.

Nun muss noch die perspektivische Lage solcher Systeme betrachtet werden. Da nun aber auf jedem Collineationsstrahl zweier perspektivischen Systeme ein Paar homologe Richtungen vereinigt und die Punktreihen dieser Richtungen proportional sind, so sind auch ihre Punkte des unendlichen Raumes homolog. Diese Punkte des unendlichen Raumes, welche auf einer Richtung liegen, müssen aber als solche betrachtet werden, die in einem Ort vereinigt sind. Solcher Punkte haben aber die Collineationsstrahlen nur zwei: der eine ist das Collineationscentrum, der andere liegt auf der Collineationsaxe. Bei perspektivischen Systemen gelangt man also zu der Affinität oder Aehnlichkeit nur dadurch, dass das Collineationscentrum oder die Collineationsaxe in den unendlichen Raum hinausrückt. Liegt das Collineationscentrum perspektivischer Systeme im unendlichen Raum, so hat man perspektivische, affine Systeme, liegt die Collineationsaxe im unendlichen Raum, so hat man ähnliche Systeme. Denn im letzteren Fall sind nothwendig die homologen Geraden parallel, weil sie in demselben Punkt der im unendlichen Raum liegenden Axe convergiren. Da nun aber alle homologen Linien parallel sind, so müssen auch die Winkel gleich sein, welche zwischen homologen Paaren gerader Richtungen eingeschlossen sind. Solche Systeme sind also jedenfalls ähnlich. Es sind aber die Systeme nicht ähnlich, sondern affin, wenn ihre Axe im endlichen Raum liegt, weil ihre homologen Geraden in Punkten dieser Axe convergiren, also einander nicht parallel sind. Es sind daher auch die Winkel nicht gleich, welche zwischen homologen I[illegible]enpaaren liegen.

Aus diesem Umstande folgt sogleich, wenn man §. 15 mit in Erwägung zieht, dass die homologen Punktreihen auf jedem Collineationsstrahl affiner Systeme eine proportionale Umhüllung der Axe und in den homologen Systemen eine proportionale Umhüllung des Collineationscentrum bilden.

Auch wird man sogleich finden, wenn man in zwei affinen Systemen, in denen zwei homologe Punkte A und A′ gegeben sind, dass der Modulus $\frac{A\mathfrak{A}}{AO} : \frac{A'\mathfrak{A}}{A'O}$, in das einfache Verhältniss $A\mathfrak{A} : A'\mathfrak{A}$ übergeht, weil das Collineationscentrum O im unendlichen Raum liegt und desswegen $AO : A'O = 1$ ist. Ebenso wird man auch in den ähnlichen Systemen finden, dass der Modulus $\frac{A\mathfrak{A}}{AO} : \frac{A'\mathfrak{A}}{A'O}$, weil hier der Punkt $\mathfrak{A}$ im unendlichen Raum liegt und also $\frac{A\mathfrak{A}}{A'\mathfrak{A}} = 1$ ist, in das einfache Verhältniss $A'O : AO$ übergeht.

Nun sind noch die Flächenräume solcher Systeme zu untersuchen. In Betreff der ähnlichen Figuren ist aber aus den Elementen bekannt, dass ähnliche Vielecke sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten verhalten. Dieses Verhältniss ist aber dem Quadrat des Modulus gleich.

In den affinen Systemen genügt es, zwei homologe Dreiecke ABC und A′B′C′ zu untersuchen (Fig. 24). Weil nun die homologen Seiten AB und A′B′ in einem Punkt α der Axe convergiren, und die Dreiecke $\alpha A \mathfrak{A}$, $\alpha A' A$, welche die homologen Richtungen mit dem Collineationsstrahl $AA'\alpha$ machen, die Grundlinie $\alpha\mathfrak{A}$ gemeinschaftlich haben, so folgt

$$\triangle\ \alpha\mathfrak{A}A : \triangle\ \alpha\mathfrak{A}A' = \mathfrak{A}A : \mathfrak{A}A';$$

aus dem gleichen Grund verhält sich auch

$$\triangle\ \alpha\mathfrak{B}B : \triangle\ \alpha\mathfrak{B}B' = \mathfrak{B}B : \mathfrak{B}B'$$

und da $\mathfrak{A}A : \mathfrak{A}A' = B\mathfrak{B} : \mathfrak{B}B'$,
so verhält sich auch

$$\triangle\ \alpha\mathfrak{A}A : \triangle\ \alpha\mathfrak{A}A' = \triangle\ \alpha\mathfrak{B}B : \triangle\ \alpha\mathfrak{B}B'$$

und hieraus folgt

$$(\triangle\,\alpha\mathfrak{B}B - \triangle\,\alpha\mathfrak{A}A) : (\triangle\alpha\mathfrak{B}B' - \triangle\,\alpha\,\mathfrak{A}A') = \alpha\mathfrak{A}A : \alpha\mathfrak{A}A'$$
$$= \mathfrak{A}A : \mathfrak{A}A',$$

d. i. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}BA : \mathfrak{A}\mathfrak{B}B'A' = \mathfrak{A}A : \mathfrak{A}A'$

ebenso $\mathfrak{B}\mathfrak{C}CB : \mathfrak{B}\mathfrak{C}C'B' = \mathfrak{A}A : \mathfrak{A}A'$

und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}CA : \mathfrak{A}\mathfrak{C}C'A' = \mathfrak{A}A : \mathfrak{A}A'$,

aus diesen drei Proportionen zieht man aber auf bekanntem Wege den Schluss, dass auch

$$ABC : A'B'C' = \mathfrak{A}A : \mathfrak{A}A'$$

d. i. dass das Verhältniss der homologen Dreiecke mit dem Modulus der Affinität gleichen Werth hat.

Affine Vielecke und Figuren überhaupt sind aus affinen Dreiecken zusammengesetzt, und werden also das gleiche Verhältniss haben wie sie.

Viertes Buch.

Collineation der Vielecke und der Curven im Allgemeinen.

A. Collineation des Dreiecks.

§. 55. Sind zwei Dreiecke in einen Dreistrahl einbeschrieben, so liegen die Schnittpunkte ihrer homologen Seiten auf einer geraden Linie; die Dreiecke sind also für diese Gerade als Collineationsaxe, und den Scheitel des Vielstrahls als Collineationscentrum perspektivisch collineär.

Umgekehrt: Wenn die Schnittpunkte der drei Seitenpaare zweier Dreiecke in einer geraden Linie liegen, so convergiren die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken in einem Punkt, die Dreiecke sind also für diesen Punkt als Collineationscentrum und jene Gerade als Collineationsaxe collineär.

§. 56. Sind zwei Dreiecke collineär, so wird jede Seite des einen Dreiecks von den zwei nicht homologen Seiten des andern Dreieks in solchen Punkten geschnitten, dass die Modulusprodukte der Theilpunkte zweier Seiten sich verhalten, wie die Produkte der anliegenden Abschnitte der dritten Seite.

Haben zwei Dreiecke eine solche Lage zu einander, dass die Seiten des einen durch die nicht homologen Seiten des andern in solchen Punkten geschnitten werden, dass die Modulusprodukte zweier Seiten sich verhalten, wie die Produkte der anliegenden Abschnitte der dritten Seite, so sind die zwei Dreiecke collineär.

§. 57. Sind zwei collineäre Dreiecke zugleich in einander beschrieben, so werden die Seiten des einen Dreiecks durch die Eckpunkte des andern Dreiecks so getheilt, dass die Modulus der Theilpunkte zweier Seiten sich zu einander verhalten, wie die anliegenden Abschnitte des Theilpunkts der dritten Seite.

Umgekehrt: Wenn zwei Dreiecke in einander beschrieben sind, und die Seiten des einen Dreiecks durch die Ecken des andern Dreiecks so getheilt werden, dass die Modulus der Theilpunkte zweier Seiten sich verhalten wie die anliegenden Abschnitte des Theilpunkts der dritten Seite, so liegen die Dreiecke perspektivisch.

§. 58. Sind zwei in einander beschriebene Dreiecke perspektivisch, so wird jede Seite des einen Dreiecks durch die homologe Seite und Gegenecke des andern Dreiecks harmonisch getheilt.

Umgekehrt: Liegen zwei in einander beschriebene Dreiecke so, dass jede Seite des einen Dreiecks durch die homologe Seite und ihre Gegenecke des andern Dreiecks harmonisch getheilt wird, so sind die Dreiecke auch perspektivisch.

Die Dreiecke ABC und A′B′C′ (Fig. 29), welche einem Dreistrahl O inbeschrieben sind, bilden mit dem Scheitel O zwei Vierecke ABCO und A′B′C′O, welche zwei collineäre Systeme bestimmen (§. 43). Diese zwei Systeme fallen aber mit drei Paaren homologer Richtungen OA und OA′, OB und OB′, OC und OC′, die in einem Punkt O convergiren und also überhaupt mit zwei homologen Vielstrahlen auf einander, folglich fallen sie auch mit allen Punkten zweier homologen Richtungen auf einander und befinden sich in perspektivischer Lage (§. 45, c). Es convergiren daher die drei Paare ihrer homologen Seiten in den Punkten α, β und γ ihrer Collineationsaxe (§. 46, b).

Umgekehrt sind zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ gegeben, deren homologe Seiten in den Punkten α, β, γ einer geraden Richtung convergiren, so bilden die Seitenrichtungen dieser Dreiecke zwei Vierecke $\alpha BA\beta$ und $\alpha B'A'\beta$, welche selbst wieder zwei collineäre Systeme bestimmen, in welchen drei Paare von Punkten in den Oertern α, β, γ einer Geraden auf einander fallen. Die zwei Systeme haben also auch einen Vielstrahl entsprechend gemein (§. 45, c), liegen perspektivisch und die Verbindungslinien AA′, BB′ und CC′ convergiren in dem Collineationscentrum O dieser perspektivischen Systeme (§. 46, a).

Die Convergenzpunkte der nicht homologen Seiten zweier collineären Dreiecke kennen zu lernen ist nicht ohne Interesse.

Es seien daher α' und α'' die Punkte, in welchen die Seite BC von den homologen Seiten A'C' und A'B' geschnitten wird; ebenso sind die Punkte β' und β'' auf AC, γ' und γ'' auf AB bestimmt worden. Zur Vereinfachung der Rechnung mag der Modulus der Schnittpunkte durch abgekürzte Zeichen dargestellt werden. Man setze:

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} = (\alpha'); \ \frac{a'' B}{\alpha'' C} = (\alpha''), \ \frac{\beta' A}{\beta' C} = (\beta')$$

$$\frac{\beta'' A}{\beta'' C} = (\beta''), \ \frac{\gamma' B}{\gamma' A} = (\gamma'), \ \frac{\gamma'' B}{\gamma'' A} = (\gamma'')$$

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = (\alpha), \ \frac{\beta A}{\beta C} = (\beta), \ \frac{\gamma B}{\gamma A} = (\gamma).$$

Nun bildet in dem Dreieck ABC die Seite A'B' eine Transversale, welche die Seiten desselben in den Punkten α', β' γ schneidet, folglich ist nach §. 27:

$$(1)\ (\alpha') : (\beta') = (\gamma).$$

Es bildet auch A'C' im Dreieck ABC eine Transversale, welche die Seiten desselben in den Punkten γ', α'' und β schneidet, folglich ist:

$$(2)\ \frac{1}{(\alpha'')} : \frac{1}{(\gamma')} = \frac{1}{(\beta)}$$

Endlich bildet auch die Seite B'C' eine Transversale im Dreieck ABC und durchschneidet dessen Seitenrichtungen in den Punkten α, β'' und γ''; folglich ist:

$$(3)\ \frac{1}{(\beta'')} : (\gamma'') = \frac{1}{(\alpha)}$$

Weil nun aber die Dreiecke ABC und A'B'C' nach Voraussetzung perspektivisch sind, so liegen die Punkte α, β und γ in einer Geraden, also ist auch

$$(4)\ (\alpha) : (\beta) = (\gamma).$$

Wenn man nun aber die Werthe von (α), (β) und (γ) aus den drei ersten Gleichungen in die vierte substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$(5)\ (\alpha') \,.\, (\alpha'') : (\beta') \,.\, (\beta'') = (\gamma') \,.\, (\gamma''), \text{ d. i.:}$$

$$\left\{\frac{\alpha' B}{\alpha' C} \cdot \frac{\alpha'' B}{\alpha'' C}\right\} : \left\{\frac{\beta' A}{\beta' C} \cdot \frac{\beta'' A}{\beta'' C}\right\} = (\gamma' B \,.\, \gamma'' B) : (\gamma' A \,.\, \gamma'' A).$$

Wenn umgekehrt zwei Dreiecke eine solche Lage zu einander haben, dass die letztgenannte Proportion zwischen den Schnittpunkten der nicht homologen Seiten Statt findet, so kann man umgekehrt, wenn man bemerkt, dass γ', α'' und β, ferner β'', γ'' und α, und endlich α', β' und γ je in einer geraden Linie liegen, den Gleichungen (1), (2) und (3) in (5) substituiren, und man kommt zum Resultat der Gleichung (4), woraus man sieht, dass die Punkte α, β und γ in gerader Linie liegen und also dass die Dreiecke perspektivisch sind.

Wenn die zwei perspektivischen Dreiecke zugleich in einander beschrieben sind, dann fallen die zwei Punkte, in welchen eine Seite von den zwei nicht homologen Seiten des andern Dreiecks geschnitten wird, auf einander. Es wird also in diesem Fall (α') und (α''), ferner (β') und (β''), ferner (γ') und (γ'') identisch, und obige allgemeine Proportion (5) verwandelt sich in folgende:

$$(6)\ (\alpha')^2 : (\beta')^2 = (\gamma')^2 \text{ oder } (\alpha') : (\beta') = (\gamma')$$

d. i. $\frac{A'B}{A'C} : \frac{B'A}{B'C} = BC' : AC'$ (Fig. 30),

so dass sich also die Modulus der Punkte A′ und B′ verhalten wie die anliegenden Abschnitte des Punktes C′. Ebenso vereinfacht sich auch hier der Umkehrungsfall.

Combinirt man den Fall der in einander beschriebenen perspektivischen Dreiecke mit der Eigenschaft der Transversalen des Dreiecks (§. 27), so liefert die Transversale A′B′ im Dreieck ABC die Proportion

$$(\alpha') : (\beta') = (\gamma),$$

diess mit der Gleichung (6) verbunden, zeigt, dass

$$(\gamma) = (\gamma'),\ \text{d. i. dass } BC' : AC' = B\gamma : A\gamma,$$

woraus man sieht, dass die Seite AB des Dreiecks ABC durch die homologe Seite A′B′ des perspektivischen, inbeschriebenen Dreiecks in dem Schnittpunkt γ, und durch das Gegeneck C′ der Seite A′B′ harmonisch getheilt ist.

Umgekehrt: wenn das Dreieck A′B′C′ so in das Dreieck ABC beschrieben ist, dass die Punkte γ und C′ die Seite AB harmonisch theilen, so folgt aus der harmonischen Theilung

dass $\quad BC' : AC' = B\gamma : A\gamma$,

und weil A′, B′ und γ in gerader Linie liegen, dass

$$\frac{A'B}{A'C} : \frac{B'A}{B'C} = B\gamma : A\gamma$$

folglich
$$\frac{A'B}{A'C} : \frac{B'A}{B'C} = BC' : AC',$$

mithin sind die Dreiecke in perspektivischer Lage.

Es mag noch zum Schluss bemerkt werden, dass der Fall der perspektivischen, in einander beschriebenen Dreiecke, ohne Hilfe des Collineationsbegriffes gewöhnlich folgender Maassen ausgesprochen wird.

Wenn man von den drei Eckpunkten eines Dreiecks nach einem beliebigen Punkt in der Ebene des Dreiecks drei gerade Linien zieht, so theilen ihre Richtungen die Seiten des Dreiecks so, dass die zwei dreigliedrigen Produkte der drei nicht an einander liegenden Seiten einander gleich sind.

Der Fall der in einander beschriebenen perspektivisch collineären Dreiecke kann aber auch unmittelbar sehr einfach auf die involutorischen Collineationssysteme, oder auch, wenn man will, auf die Eigenschaften des Vierecks (§. 38, d) zurückgeführt werden.

B. Eigenschaften des Vierecks, welche auf Collineation beruhen.

§. 59. Auf der Aehnlichkeit beruht folgende Eigenschaft des Vierecks:

Wenn man die Mitten der gegenüberstehenden Seiten eines Vierecks, und die Mitten der zwei Diagonalen mit einander durch Gerade verbindet, so convergiren dieselben in einem Punkte.

§. 60. Auf dem involutorischen Collineationssysteme beruhen folgende Eigenschaften des Vierecks:

a) Jede Diagonale des vollständigen Vierecks wird durch die zwei andern Diagonalen harmonisch getheilt.

b) Im Vierseit trennen jede zwei Diagonalen die zwei Gegenseiten, welche mit ihnen in einem Eck convergiren, harmonisch.

c) Wenn ein Dreistrahl von zwei Transversalen geschnitten wird, so entstehen zwei Vierecke, deren Diagonalen in Punkten convergiren, welche mit dem Convergenzpunkt der Transversalen in gerader Linie sind.

§. 61. Auf der perspektivischen Collineation im Allgemeinen beruhen folgende Eigenschaften des Vierecks:

Zieht man von einem Punkt der Diagonale eines Vierecks zwei Transversalen durch das Viereck, so schneiden dieselben die Seiten des Vierecks in solchen Punkten, deren Verbindungslinien wieder auf der andern Diagonalen convergiren.

Die Mitten der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.

Das Viereck ist, wie schon im zweiten Buche gezeigt wurde, durch manche Eigenschaften ausgezeichnet, welche auch auf Collineation zurückgeführt werden können. Verbindet man z. B. die Mitten P, Q und R der in einem Eck A (Fig. 31) zusammenlaufenden Seiten durch Gerade, so bilden sie ein Dreieck QPR, dessen Seiten den Seiten des Dreiecks BCD, das von den übrigen Seiten gebildet wird, parallel sind (§. 26). Verbindet man nun auch die Mitten P′, Q′ und R′ des letztern Dreiecks BCD, so entsteht ein zweites Dreieck P′Q′R′, dessen Seiten ebenfalls den Seiten des Dreiecks BCD parallel sind (§. 26). In den Dreiecken PQR und P′Q′R′ sind also ebenfalls die homologen Seiten einander parallel. Die homologen Seiten convergiren also in Punkten einer unendlich entfernten Collineationsaxe, die Dreiecke sind ähnlich in perspektivischer Lage (§. 55). Die Verbindungslinien der homologen Eckpunkte PP′, OQ′ und RR′ convergiren also in einem Punkt O, dem Aehnlichkeitspunkt der Systeme. Man wird leicht noch bemerken, dass die Dreiecke nicht nur ähnlich, sondern sogar congruent sind, und dass ihre Aehnlichkeit zum besonderen Fall der Uniformität gehört.

Noch wesentlicher ist dem Viereck die Eigenschaft der Involution (Fig. 32), sobald man es in seiner vollständigen Gestalt betrachtet, und durch Verlängerung seiner gegenüberstehenden Seiten die versteckten Ecken E und F und die dritte, versteckte Diagonale EF construirt. Betrachtet man nämlich den Convergenzpunkt O der Diagonalen BD und EF als Collineationscentrum, und die Diagonale AC als Collineationsaxe, so

sind AF und AE homologe Gerade dieser Collineation, die von den Collineationsstrahlen des Centrums O in den homologen Punkten B und D, F in E geschnitten werden. Weil aber auch die wechselseitigen Verbindungslinien BE und DF dieser homologen Punkte in dem Punkt C der Collineationsaxe AC convergiren, so gehört die Collineation zum besonderen Fall der Involution (§. 48). Die Collineationsstrahlen BD und EF werden also von den Punkten O und O′, O und O″ harmonisch getheilt.

Dieselben Folgerungen können (Fig. 33) im Dreistrahl O angewendet werden, welcher von zwei Transversalen AQ und A′Q durchschnitten wird, wodurch die Vierecke ABB′A′ und BCB′C′ entstehen, deren Diagonalen sich in den Punkten R und S durchschneiden. Hier sind für den Punkt O als Centrum und RQ als Axe die Geraden AB und A′B′ involutorisch homolog, wenn man daher noch durch einen dritten Collineationsstrahl die homologen Punkte C und C′ bestimmt, so müssen auch die Verbindungslinien BC′ und B′C in einem Punkt S der Axe QR convergiren (§. 48, d).

Man kann das Viereck auch noch vom allgemeinen Standpunkt der Collineation aus betrachten (Fig. 34), wenn man eine Diagonale DB als Collineationsaxe, die andere Diagonale AC als Collineationsstrahl betrachtet und auf ihr das Centrum O in einen beliebigen Punkt O setzt. Es erscheinen unter diesen Bedingungen die Seiten AB und BC einerseits, die Seiten AD und DC andererseits als homologe Linien. Zieht man also vom Centrum O aus noch zwei beliebige Strahlen, welche auf den Seiten des Vierecks die homologen Punkte F und F′, E und E′ bestimmen, so sind auch die Geraden FE und F′E′ homolog und werden in einem Punkt Q der Collineationsaxe BD convergiren (§. 46, *b*).

Zur Uebung noch eine beachtenswerthe Eigenschaft des Vierecks.

In dem vollständigen Vierseit ABCDEF (Fig. 35) sind die Punkte R, P und ψ die Mitten der Diagonalen BD und der anliegenden Seiten BC und BF; so dass also diese Punkte auf einer

mit DF parallelen Geraden liegen. Ebenso liegen die Punkte R', P' und ψ, wenn sie die Diagonale FE und die Seiten FC und FB halbiren, auf einer mit BE parallelen Geraden. Ferner sind auch die Punkte R', Q' und ξ; R, Q und ξ gleicher Maassen Punkte zweier Geraden, welche die in D und E zusammenlaufenden Linien halbiren, und mit den Seiten BE und DF parallel sind. Diesem nach ist das Viereck $R'\psi R\xi$ ein Parallelogramm, in welchem

$$\xi Q = R'P',\ RP = \xi Q'$$
$$QR = P'\psi,\ P\psi = Q'R'$$

folglich
$$\frac{\xi Q}{QR} = \frac{R'P'}{P'\psi};\ \frac{RP}{P\psi} = \frac{\xi Q'}{Q'R'}$$

also auch
$$\frac{\xi Q}{QR} : \frac{RP}{P\psi} = \frac{R'P'}{P'\psi} : \frac{\xi Q'}{Q'R'}$$

Die Transversalen QP und P'Q' der Dreiecke $\xi\psi R$ und $\xi\psi R'$ werden also die gemeinschaftliche Grundlinie in einem und demselben Punkte durchschneiden (§. 27). Es sind also die Dreiecke QPR und Q'R'P' perspektivisch (§. 45) und die Verbindungslinie RR' convergirt mit den Verbindungslinien QQ' und PP' in einem Centrum S. Der Punkt S liegt aber in der Mitte von AC; da die Punkte Q und Q' die Strecken DC und EC halbiren und also QQ' ∥ AE ist. Die Mitten S, R und R' der drei Diagonalen liegen also in einer geraden Linie.

C. Allgemeine Eigenschaften collineärer Curven.

§. 62. Wenn von zwei collineären Linien die eine die Gestalt einer Curve hat, so ist auch die andere eine Curve.

Wenn in zwei collineären Systemen verschiedene Linien sich befinden, worunter Curven und Gerade sein können, so sind sie folgenden Gesetzen unterworfen:

a) Geht eine Linie durch einen Punkt, so geht auch im collineären System die homologe Linie durch den homologen Punkt.

b) Schneiden sich zwei Linien des einen Systems in mehreren Punkten, so schneiden sich auch im collineären System die homologen Linien in eben so vielen Punkten, und die Schnittpunkte dieser homologen Linien sind selbst paarweise homolog.

c) Berühren sich zwei Linien des einen Systems in einem Punkte von innen oder von aussen, so berühren sich auch im collineären System die homologen Linien auf dieselbe Art, und es sind die zwei Berührungspunkte homolog.

d) Werden in zwei collineären Systemen zwei homologe Curven von zwei homologen Geraden berührt, so sind auch die Berührungspunkte homolog, und umgekehrt, wenn man in zwei homologen Punkten zweier homologen Curven Tangenten zieht, so sind sie zwei homologe Geraden.

§. 63. Ist von zwei homologen Curven zweier collineären Systeme die eine in sich geschlossen und ganz im endlichen Raum, so zeigt die Gegenaxe ihres Systemes die Gestalt ihrer homologen Curve an.

a) Liegt die Gegenaxe ausserhalb der geschlossenen Curve, so ist auch die homologe Curve in sich geschlossen und liegt im endlichen Raum.

b) Wird die in sich geschlossene endliche Curve des einen Systems von der Gegenaxe in zwei Punkten geschnitten, so liegt die homologe Curve des collineären Systems mit zwei Punkten im unendlichen Raum, und erscheint im endlichen Raum in Form von zwei von einander getrennten Aesten, deren jeder nach zwei Seiten hin in's Unendliche verläuft. Die Tangenten an den Schnittpunkten, welche die Gegenaxe auf der endlichen Curve hervorbringt, erscheinen in der homologen Curve als Asymptoten, d. h. als Tangenten, welche dieselbe erst in Punkten des unendlichen Raums berühren, und zwar werden die zwei nur im unendlichen Raum mit einander zusammenhängenden Curvenäste durch die Asymptoten von einander getrennt.

c) Wird die in sich geschlossene endliche Curve des einen Systems von der Gegenaxe ihres Systems berührt, so hat die homologe Curve des collineären Systems nur einen Punkt im unendlichen Raum, und erscheint im endlichen Raum als eine Curve, welche nach zwei Seiten hin in's Unendliche verlauft. Eine solche Curve hat im endlichen Raum keine Asymptote.

§. 64. Liegen zwei collineäre Curven perspektivisch, so bemerkt man folgende Eigenschaften:

a) Ein Collineationsstrahl, welcher die eine Curve in zwei Punkten schneidet, schneidet immer auch die andere in zwei homologen Punkten, und wenn ein Collineationsstrahl die eine Curve in einem Punkte berührt, so berührt er auch die andere Curve in einem homologen Punkte, und ist somit eine gemeinschaftliche Tangente der zwei Curven.

Umgekehrt: Wenn zwei collineäre und perspektivische Curven eine gemeinschaftliche Tangente entsprechend gemein haben, so geht sie durch ihr Collineationscentrum.

b) Wenn die Collineationsaxe die eine von zwei perspektivischen collineären Curven in zwei Punkten schneidet, so schneidet sie auch die andere in denselben Punkten, und ist ihre gemeinschaftliche Sehne.

Umgekehrt: Wenn zwei collineäre und perspektivische Curven sich in zwei entsprechenden, gemeinschaftlichen Punkten schneiden, so ist die gemeinschaftliche Sehne immer auch ihre Collineationsaxe.

c) Wenn die Collineationsaxe die eine von zwei perspektivischen, collineären Curven in einem Punkte berührt, so berührt sie auch die andere Curve in demselben Punkte.

Umgekehrt: Wenn zwei collineäre und perspektivische Curven in einem homologen gemeinschaftlichen Punkt sich berühren, so ist die Tangente dieses Berührungspunktes ihre Collineationsaxe.

Sobald von zwei Curven ermittelt ist, dass sie collineär sind, so haben sie gewisse Eigenschaften mit einander gemein, welche nicht selten dazu dienen, die Gestalt der einen Curve aus der andern abzuleiten.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass, wenn von zwei collineären Linien, die eine ihrer Gestalt nach eine Curve ist, auch die andere zu den Curven gerechnet werden muss. Denn wenn z. B. eine Curve der zweiten Ordnung nicht drei Punkte hat, die in gerader Richtung liegen, so kann auch jede mit ihr collineäre Linie nicht drei Punkte haben, die in einer geraden Richtung liegen (§. 42, b). Diese letztere Linie ist also ebenfalls eine Curve der zweiten Ordnung. Aber auch, wenn es sich von Curven höherer Ordnung handelt, so ist doch leicht einzusehen, dass jenes Gesetz auf sie anwendbar ist; indem man hier sich nur auf Punkte beschränken muss, die nahe genug aneinander liegen, damit nicht drei Punkte in gerader Richtung sich befinden. Es werden übrigens im weiteren Verlauf nur Curven der zweiten Ordnung in Betracht gezogen werden.

Ruft man sich nun aber den Begriff der homologen Linien collineärer Systeme in's Gedächtniss (§. 42), wonach zwei Li-

nien homolog heissen, wenn alle Punkte der einen Linie allen Punkten der andern Linie homolog sind, so ist klar, dass, wenn die eine durch einen gegebenen Punkt geht, auch die andere durch den homologen Punkt des andern Systems gehen muss. Hieraus folgt weiter, dass wenn zwei Linien, seien sie gerade oder krumm, sich in einem Punkte schneiden, auch die homologen Linien des andern Systems durch den Punkt des anderen Systems gehen werden, welcher jenem Schnittpunkt homolog ist. Erwägt man aber noch weiter das Gesetz der gleichen Aufeinanderfolge, das schon zwischen conformen einförmigen Grundgebilden herrscht (§. 17), und das folglich auch in den collineären Systemen, die aus lauter conformen einförmigen Gebilden zusammengesetzt sind, Geltung haben muss (§. 42), so wird man sich sogleich überzeugen, dass wenn zwischen zwei Curven des einen Systems ein Schneiden stattfindet, wo die eine Linie von der einen Seite auf die andere Seite der zweiten Linie tritt, dasselbe auch bei den zwei homologen Linien des zweiten Systems der Fall sein muss. Ebenso wird man schliessen, dass, wenn zwischen den zwei Linien des ersten Systems ein Berühren stattfindet, wobei die eine derselben immer auf der gleichen Seite der anderen bleibt, auch in den homologen Curven der anderen Systeme ein Sichberühren stattfinden wird. Namentlich ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass, wenn eine Curve und eine Gerade eines Systems sich in einem Punkte berühren, auch im collineären System zwischen den zwei homologen Linien eine Berührung stattfinden muss. Denn diese zwei Linien müssen ja jedenfalls durch den Punkt gehen, welcher dem Berührungspunkt der zwei Linien des ersten Systems homolog ist (§. 62, b) und ausser diesem Punkt können die Curven keinen anderen gemein haben. Auch kann man diesen Satz umkehren und sagen: wenn zwei homologe Curven zweier collineären Systeme durch zwei homologe Punkte gehen, so müssen die Tangenten dieser Punkte homologe Gerade sein, denn, wenn das nicht wäre, so käme man sogleich mit dem direkten Satz (§. 62, d) in Widerspruch.

Wenn bei der Collineation der zwei Systeme noch die Gegenaxen gegeben sind, so können von der gegebenen Gestalt einer Curve des einen Systems noch mehr Schlüsse über die Gestalt der homologen Curve des andern Systems gemacht werden. Denn liegen in dem einen System eine geschlossene Curve und die Gegenaxe aus einander, so dass sie keinen Punkt mit einander gemeinschaftlich haben, so kann auch in dem andern System die homologe Curve mit keinem Punkt im unendlichen Raum liegen (§. 44).

Wird aber die Curve des einen Systems von der Gegenaxe in zwei Punkten C und D geschnitten (Fig. 36), so muss die homologe Curve des collineären Systems durch die Punkte C' und D' gehen, die jenen Schnittpunkten homolog sind (§. 62, b), welche aber im unendlichen Raum liegen (§. 44), folglich liegt diese Curve des zweiten Systems mit zwei Punkten im unendlichen Raum. Wie aber die Gegenaxe die eine Curve in zwei Bögen DAC und DBC trennt, die nur in den Punkten C und D mit einander zusammenhängen, so muss auch die unendlich entfernte Gerade die Curve des collineären Systems in zwei Bogen C'A'D' und C''B'D'' trennen, die nur mit zwei Punkten des unendlichen Raumes zusammenhängen. Zieht man aber, um diese Vorstellung noch zu vervollständigen in den Punkten C und D Tangenten an die Curve des einen Systems, welche sich in einem Punkte T schneiden, so werden auch ihre homologen Linien des andern Systems zwei gerade Linien sein, welche die Curve C'A'D'D''B'C'' in zwei Punkten des unendlichen Raumes berühren, und in einem Punkt T' des endlichen Raumes convergiren, der mit dem Punkte T homolog ist (§. 62, b).

Solche gerade Linien, welche einer Curve sich immer mehr nähern, aber erst in einem Punkt des unendlichen Raumes wirklich mit ihr zusammentreffen und sie dort berühren, heissen Asymptoten. Wenn aber nun in diesen homologen Geraden der Convergenzpunkt T dem Convergenzpunkt T' entspricht, so entsprechen dem Punkte C der Geraden CT die unendlich entfernten Punkte C', C'' der Geraden C'T', welche

aber in der Anschauungsweise der neueren Geometrie nur als ein einziger Punkt (welcher durch denselben Modulus bestimmt ist) betrachtet wird. Die zwei getrennten Aeste der homologen Curve haben also eine solche Lage, dass die zwei Halbäste A′C′ und B′C″ mit den unendlich entfernten Punkten der Geraden C′C″ zusammenlaufen, und die Tangente C′C″ erscheint andererseits, wenn man die unendlich entfernten Punkte als verschieden betrachten will, als die Verbindungslinie derselben. Dasselbe ist der Fall mit der Tangente D′D″. Wenn endlich der Bogen CAD der einen Curve in stetig aufeinander folgenden Punkten die zwei Punkte C und D einerseits mit einander verbindet, und nun andererseits dasselbe auch durch den Bogen CBD geschieht, so werden nach dem Gesetz der gleichen Aufeinanderfolge auch im collineären System die unendlich entfernten Punkte (C′, C″) und (D′, D″) durch die Bögen C′A′D′ und C″B′D″ verbunden werden, so dass die zwei Aeste hier als durch die Asymptoten von einander getrennt erscheinen. Diese Trennung ist aber nur ein Schein, sobald man die Anschauung der Aufeinanderfolge, wie sie die neuere Geometrie verlangt, festhält, wo die unendlich entfernten Punkte in der Richtung von C′C″, so wie die in der Richtung von D′D″ als identisch betrachtet werden.

Wenn endlich die Curve des einen Systems ihre Gegenaxe berührt, so muss auch die homologe Curve des collineären Systems die unendlich entfernte Gerade in einem Punkt berühren, welcher jenem homolog ist (§. 62). Man wird also wie im Vorausgehenden schliessen, dass diese zweite Curve mit einem Punkt im unendlichen Raum liegt, also im endlichen Raum als eine Linie erscheint, welche nach zwei Seiten hin in's Unendliche verlauft, um sich dort wieder zu vereinigen. Eine solche Curve hat aber keine Asymptoten, weil die Tangente, welche sie in einem unendlich entfernten Punkt berührt, selbst im unendlichen Raum liegt. Alle Tangenten des endlichen Raumes berühren sie also auch in Punkten des endlichen Raumes.

Wenn zwei collineäre Curven zugleich perspektivisch lie-

gen, so gewinnen die gemeinschaftlichen Tangenten, und wenn jene Curven sich schneiden, die Schnittpunkte eine ausgezeichnete Bedeutung. Es sollen auch hier nur Curven der zweiten Ordnung vorausgesetzt werden, welche von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten werden, und an welche von einem äusseren Punkte aus höchstens zwei Tangenten gezogen werden können. Bemerkt man nun, dass auf jedem Collineationsstrahl zwei homologe Gerade der collineären Systeme vereinigt sind, so folgt sogleich aus §. 52, b und c, dass, wenn ein Collineationsstrahl die eine Curve in zwei Punkte schneidet, oder in einem Punkt berührt, auch ihre homologe Curve des collineären Systems das Gleiche von ihrem Collineationsstrahl erfahren muss; auch folgt umgekehrt, dass, wenn zwei collineäre und perspektivische Aeste eine gemeinschaftliche Tangente entsprechend gemein haben, diese ein Collineationsstrahl sein und also durch das Collineationscentrum gehen muss (§. 46).

Weil ferner auf der Collineationsaxe perspektivischer Systeme alle Punkte entsprechend gemein sind, so muss die Collineationsaxe, wenn sie die eine von zwei solchen homologen Curven schneidet oder berührt, auch die andere in denselben Punkten schneiden und berühren; und umgekehrt (§. 62, a).

Fünftes Buch.

Der Kreis.

A. Conformität des Kreises.

§. 65. Auch bei zwei ausser einander liegenden conformen Vielstrahlen kann man die Unterscheidung der einstimmigen und entgegengesetzten Lage noch in Anwendung bringen. Zeichnet man nämlich noch einen dritten Hilfsvielstrahl, welcher mit dem ersten den Scheitel gemeinschaftlich hat, und dessen Strahlen mit denen des zweiten Vielstrahls parallel gehen und demgemäss homolog genannt werden, so sind die zwei gegebenen Vielstrahlen in einstimmiger Lage, wenn der erste Vielstrahl mit dem Hilfsvielstrahl in einstimmiger Lage sich befindet; im andern Fall sind die zwei gegebenen Vielstrahlen in entgegengesetzter Lage. Solche einstimmige oder entgegengesetzte conforme Vielstrahlen theilen auch jede Transversale, die nicht zwischen ihren Scheiteln hindurchgeht, entsprechend in zwei conformen Punktreihen einstimmiger oder entgegengesetzter Lage.

§. 66. Zwei Vielstrahlen, deren homologe Strahlen in Punkten einer Kreislinie convergiren und deren Scheitel auf eben dieser Kreislinie liegen, sind einander gleich in einstimmiger Lage, liegen aber projektivisch gegen einander, und es sind die zwei Strahlen, welche in ihrer Scheitellinie vereinigt sind, nicht unter sich, sondern denjenigen Strahlen homolog, welche die Kreislinie berühren.

Umgekehrt: Wenn zwei gleiche Vielstrahlen sich in einstimmiger aber projektivischer Lage befinden, so convergiren ihre homologen Strahlen in Punkten einer Kreislinie, welche durch ihre Scheitel geht, und es sind die in ihrer Scheitellinie vereinigten Strahlen mit denjenigen homolog, welche die Kreislinie berühren.

§. 67. Sind eine Kreislinie und mehrere Tangenten derselben gegeben, so haben diese die Eigenschaft, alle andern beliebig gezogenen

Tangenten conform zu theilen. Zwei auf solche Weise conform getheilte Tangenten liegen aber projektivisch, und die zwei Punkte, welche in ihrem Convergenzpunkt vereinigt sind, sind den Berührungspunkten der Tangenten homolog.

Umgekehrt: wenn zwei Tangenten eines Kreises durch drei andere Tangenten geschnitten werden, und man sucht zu diesen drei Paaren von Schnittpunkten weitere conforme Punkte, und verbindet zwei homologe derselben durch eine Gerade, so berührt sie den Kreis.

§. 68. Diese Eigenschaften der Conformität des Kreises können auch noch in folgende Form gefasst werden:

a) Jedes in einem Kreis inbeschriebene Sechseck hat die Eigenschaft, dass die drei Convergenzpunkte seiner gegenüberstehenden Seiten in Punkten einer geraden Richtung liegen.

b) Jedes um einen Kreis beschriebene Sechseck hat die Eigenschaft, dass die drei Verbindungslinien seiner gegenüberstehenden Ecken in einem Punkt convergiren.

c) Ist ein Viereck in einem Kreis beschrieben, so convergiren die Tangenten zweier gegenüberstehenden Ecken in einem Punkt der Diagonale, welche die Convergenzpunkte der gegenüberstehenden Seiten verbindet.

d) Ist ein Viereck um einen Kreis beschrieben, so convergiren die Verbindungslinien der Berührungspunkte der gegenüberstehenden Seiten im Convergenzpunkt der Diagonalen, welche die gegenüberstehenden Ecken des umbeschriebenen Vierecks verbinden.

Die bekannte Eigenschaft des Kreises, dass die Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bögen aufstehen, einander gleich sind, gewinnt bei der Anschauungsweise der neueren Geometrie eine beachtenswerthe Gestalt. Zieht man nämlich von den Punkten O und O′ der Peripherie durch die Punkte A, B, C der Kreislinie gerade Linien, so ist nach der angeführten Eigenschaft der Peripheriewinkel

$$\angle AOB = \angle AO'B \text{ und } \angle BOC = \angle BO'C \text{ etc.},$$

d. h. aber in der Sprache der neueren Geometrie, es ist Vielstrahl O, ABC = O′, ABC. Zugleich wird man sehen, dass diese Vielstrahlen sich in einstimmiger Lage befinden, sei es, dass man zu diesem Zweck in O′ einen Hilfsvielstrahl construiren will, dessen Strahlen denen des Vielstrahls O parallel

gehen, oder dass man, wie diess in Fig. 37 geschehen ist, eine Transversale ausserhalb OO′ ziehen will, um die Einstimmigkeit der Reihen α, β, γ und α', β', γ' zu sehen, welche die Vielstrahlen O und O′ auf den Transversalen hervorbringen.

Auch wird man sich überzeugen, dass dieser Satz umgekehrt werden kann, wenn man bemerkt, dass zwei gleiche Vielstrahlen, durch ein Paar homologer Strahlen und ein Kreis durch drei Punkte seiner Peripherie vollkommen bestimmt sind. Sind z. B. OA und O′A zwei in A convergirende Strahlen der zwei gleichen und einstimmig liegenden Vielstrahlen O und O′, und nimmt man nun nach einer Seite hin $\angle AO'B = \angle AOB$, so sind auch OB und O′B zwei homologe Strahlen, welche den Punkt B bestimmen. Bei dieser Voraussetzung liegen aber die Punkte O und O′ auf einer Kreislinie, welche durch die Punkte A und B geht. Weil aber die Kreislinie schon durch drei Punkte bestimmt ist, so liegt auch der Punkt B nothwendig auf der Kreislinie, welche durch die drei Punkte A, O und O′ geht. Aus demselben Grund liegen die Convergenzpunkte aller andern homologen Strahlenpaare auf derselben Kreislinie.

Diese conformen Vielstrahlen der Kreislinie befinden sich in projektivischer Lage schon desswegen, weil die Convergenzpunkte A, B, C in den homologen Strahlen nicht in gerader Richtung sich befinden. Auch sieht man, dass der Strahl OO′ des Vielstrahls O mit dem Strahl O′E des Vielstrahls O′ homolog ist, welcher den Kreis in O′ berührt, eben weil diese zwei Strahlen in dem Punkt O′ der Kreislinie convergiren. Man kann dieses aber auch direkt sehen, indem der Strahl OO′ mit dem Strahl OA einen Winkel AOO′ macht, der eben so gross ist, als der Winkel AO′F, den die homologen Strahlen O′A und OF des gleichen Vielstrahls O′ mit einander machen, und von welchen der letztere den Kreis in O berührt.

Bei der vorausgehenden Auseinandersetzung wurden die Punkte A, B, C, in welchen die homologen Strahlen convergiren, so genommen, dass sie alle in einem und demselben

durch OO' gebildeten Kreisabschnitt lagen; man wird leicht sehen, dass sich diese Verhältnisse nicht ändern, wenn diese Punkte theilweise auch im andern Abschnitte liegen, und die vorausgehenden Sätze haben daher eine unbeschränkte Giltigkeit.

Die Conformität des Kreises erstreckt sich aber nicht blos auf die inbeschriebenen Vielstrahlen, sondern auch auf die Tangenten. Bezeichnet man nämlich die Punkte, in welchen die zwei Tangenten der Punkte O und O' (Fig. 38) von den Tangenten der Punkte A, B, C etc. geschnitten werden; beziehlich mit α, α', β, β', γ, γ', und zieht man nach diesen Punkten die Centralrichtungen $J\alpha$, $J\beta$, $J\gamma$, so wird man sogleich bemerken, dass $J\alpha \perp OA$, $J\beta \perp OB$, $J\gamma \perp OC$, weil die Centralrichtung senkrecht auf der Berührungssehne der Tangente steht.

Es ist also auch Vielstrahl $J, \alpha\beta\gamma = O, ABC$.

Aus dem gleichen Grund ist $J, \alpha'\beta'\gamma' = O', ABC$,
weil aber $O, ABC = O', ABC$ (§. 66),
so folgt Vielstrahl $J, \alpha\beta\gamma = J, \alpha'\beta'\gamma'$,
also auch $\alpha\beta\gamma \barwedge \alpha'\beta'\gamma'$ (§. 30).

Diese conformen Punktreihen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ liegen projektivisch, denn es ist der Strahl JQ, welcher an den Convergenzpunkt Q gezogen wird, dem Strahl OO' des Vielstrahls O homolog, weil diese Strahlen auf einander senkrecht stehen, folglich ist auch der Punkt Q der Tangente OQ dem Punkt O' der Tangente $O'Q$ homolog. Ebenso schliesst man auch, dass der Punkt Q der Tangente $O'Q$ dem Punkt O der Tangente OQ homolog ist, und dass somit die zwei in Q vereinigten Punkte den Berührungspunkten O und O' der Tangenten homolog sind: so dass also $\alpha\beta\gamma OQ \barwedge \alpha'\beta'\gamma' QO'$.

Man kann auch eine Umkehrung hiervon bewerkstelligen. Sind nämlich $Q\beta$, $Q\beta'$ und $\beta\beta'$ drei Gerade, welche einen Kreis J in den Punkten O, O' und B berühren, und sucht man zu $QO\beta$ und zu $O'Q\beta'$ ein weiteres Paar homologer Punkte γ und γ', so muss auch die Gerade $\gamma\gamma'$ den Kreis berühren. Denn wenn diess nicht so wäre, so könnte man ja von γ aus eine Tangente an den Kreis ziehen, welche die andere Tan-

gente in einem von γ differenten Punkt γ'' schneiden würde. Da aber nun nach dem vorausgehenden Satz

$$\beta\gamma OQ \barwedge \beta'\gamma''QO'$$

und nach der Annahme $\beta\gamma OQ \barwedge \beta'\gamma'QO'$,
so würde folgen, dass $\beta'\gamma''QO' \barwedge \beta'\gamma'QO'$, was mit §. 20, a im Widerspruch ist. Es muss also auch $\gamma\gamma'$ den Kreis berühren.

Diese Eigenschaft des Kreises in Betreff seiner inbeschriebenen Vielstrahlen und seiner Tangenten, welche als eine unmittelbare Folge der Gleichheit der in demselben Abschnitt liegenden Peripheriewinkel sich ergab, führt sogleich noch auf folgende weitere merkwürdige Eigenschaft der Kreislinie, die im Wesentlichen nur eine andere Fassung des Conformitätsgesetzes sind.

Ist nämlich das Vieleck ABCDEF in den Kreis beschrieben und zieht man von den Punkten A und B aus Diagonalen (Fig. 39) nach den übrigen Ecken, so wird man zwei gleiche Vielstrahlen A, CDEF und B, CDEF erhalten, welche in projektivischer Lage conform sind, folglich müssen nach §. 40 die Convergenzpunkte α, β, γ der gegenüberstehenden Seiten in einer Richtung liegen.

Ist ferner ABCDEF ein Sechsseit (Fig. 40), das um einen Kreis beschrieben ist, so werden je vier Seiten desselben, weil sie Tangenten des Kreises sind, die zwei übrigen conform in projektivischer Lage theilen; das Sechseck hat also nach §. 37 die Eigenschaft, dass die Verbindungslinien AD, BE, CF der gegenüberstehenden Ecken in einem Punkt O convergiren.

Ist ferner ABCD ein Viereck (Fig. 41), das in einen Kreis beschrieben ist, und dessen Diagonalen AC und BD in dem Punkt O convergiren, so sind, wenn man auch noch die Tangente MH durch B und die Tangente MG durch D zieht B, ADCM und D, AMCB zwei conforme Vielstrahlen, in welchen die auf der Scheitellinie zusammen fallenden Strahlen den Tangenten BM und DM homolog sind (§. 66). Es hat also dieses Viereck die Eigenschaft, dass die Convergenzpunkte E und F seiner gegenüberstehenden Seiten mit dem Punkt M in einer geraden Richtung liegen (§. 41, c). Zieht man auch noch

in den Punkten A und C die Tangenten JL und LH, so muss aus demselben Grund auch der Convergenzpunkt L mit den Punkten E und F in gerader Richtung liegen. Man kann aber auch die Punkte A und B als die Scheitel der zwei conformen Vielstrahlen A, BCDJ und B, JCDA betrachten und es folgt, dass der Convergenzpunkt J der Tangenten auf der Richtung OE liegt, und wenn man D und C zu Scheiteln der Vielstrahlen wählt, so folgt ebenso, dass der Convergenzpunkt G der Tangenten auf der Richtung OE liegt. Endlich findet man noch, dass die Punkte K, H, O und F in einer Richtung liegen.

Ist GHIK ein umbeschriebenes Viereck des Kreises, so werden je zwei Tangenten KG und IH durch die anderen Tangenten conform getheilt, und die in ihrem Convergenzpunkt M vereinigten Punkte sind nicht unter sich, sondern beziehungsweise den Berührungspunkten D und B homolog (§. 67). Das umbeschriebene Viereck GHIK hat also die Eigenschaft, dass dessen Diagonalen GI und HK in einem Punkt der Geraden DB convergiren, welche die Punkte D und B verbindet (§. 38, c). Aus gleichen Gründen müssen auch die Diagonalen GI und HK in einem Punkt der Geraden AC convergiren; es werden also überhaupt die Diagonalen der gegenüberstehenden Ecken des umbeschriebenen Vierecks in einem Punkt mit den Verbindungslinien der Berührungspunkte der gegenüberstehenden Ecken convergiren.

B. Involution des Kreises.

§. 69. Bringt man einen involutorischen Vielstrahl mit einem Kreise so in Verbindung, dass der Scheitel desselben auf der Kreislinie liegt, so heissen die Punkte der Kreislinie, in welchen sie von den Strahlen des involutorischen Vielstrahls getroffen wird, **involutorische Punkte** der Kreislinie.

Solche involutorische Punkte der Kreislinie haben die Eigenschaft, dass sie, mit irgend einem andern Punkt der Kreislinie verbunden, stets einen involutorischen Vielstrahl bilden; auch theilen die Tangenten der involutorischen Punkte der Kreislinie jede andere Tangente derselben Kreislinie in einer involutorischen Reihe von Punkten.

Die ganze Involution des Kreises ist durch zwei Paare homologer Punkte vollkommen bestimmt, so dass zu jedem weitern Punkt der Kreislinie nur noch ein einziger homologer Punkt existirt.

Es gibt zwei, beziehungsweise drei Arten der Kreisinvolution:

a) Die zwei Reihen der homologen Punkte stehen in einstimmiger Aufeinanderfolge; dann gibt es nirgends einen Punkt, in welchem zwei homologe Punkte der Involution zusammenfallen.

b) Die zwei Reihen der homologen Punkte stehen in entgegengesetzter Aufeinanderfolge; dann gibt es immer zwei Hauptpunkte, d. h. solche Punkte, in deren jedem ein Paar homologer Punkte vereinigt ist.

c) In dem letzten Fall bilden die zwei Hauptpunkte mit einem Paar homologer Punkte vier harmonische Punkte der Kreislinie. Solche harmonische Punkte der Kreislinie haben also die Eigenschaft, dass sie mit jedem Punkt der Kreislinie einen harmonischen Vierstrahl bilden, und dass deren Tangenten jede andere Kreistangente in vier harmonischen Punkten schneiden.

§. 70. Die involutorischen Punkte einer Kreislinie sind wirklich homologe Punkte zweier involutorischer Collineationssysteme, und haben also die Eigenschaft, dass alle Verbindungslinien der homologen Punkte in einem einzigen Punkt dem Centrum der Collineation convergiren, und dass alle Paare von homologen Richtungen auf einer einzigen Geraden, der Axe der Collineation, convergiren.

Umgekehrt: jede Kreislinie wird durch jeden Vielstrahl in involutorischen Punkten durchschnitten.

Das Involutionscentrum des Kreises heisst auch Pol; die Involutionsaxe Polare; die Collineationsstrahlen heissen Polstrahlen. *)

Der Begriff der Involution führt noch zu folgenden Eigenschaften des Kreises:

a) Pol und Polare trennen jedes Paar der homologen Punkte harmonisch; umgekehrt: wenn man auf den Polstrahlen zu dem Pol je die andern Punkte sucht, welche die homologen Punkte harmonisch trennen, so liegen sie alle auf einer Geraden, welche die Polare zu jenem Pol ist.

---

*) Diese Benennungen erscheinen hier bloss als Abkürzungen, werden aber durch Eigenschaften des Kreises, welche später im Abschnitt E abgehandelt werden, als nothwendig gerechtfertigt.

b) Die Polare steht senkrecht auf dem centralen Polstrahl der Kreisinvolution.

§. 71. In Betreff der verschiedenen Arten, welche die Kreisinvolution darbietet, findet man Folgendes:

a) Haben die involutorischen Punkte eine einstimmige Aufeinanderfolge, so liegt der Pol der Involution in der Fläche, und die Polare ausserhalb der Fläche des Kreises; und umgekehrt.

b) Liegt der Pol der Involution im Mittelpunkt des Kreises, so geht die Collineation in Uniformität über, die Polare ist eine Gerade des unendlichen Raumes; alle Durchmesser des Kreises halbiren sich gegenseitig.

c) Haben die involutorischen Punkte eine entgegengesetzte Aufeinanderfolge, so liegt der Pol der Involution ausserhalb der Kreisfläche, und die Polare schneidet die Kreislinie in den zwei Hauptpunkten. Die Tangenten dieser Hauptpunkte gehen durch den Pol und sind also Polstrahlen. Umgekehrt: liegt der Pol der Kreisinvolution ausserhalb des Kreises, so schneidet die Polare die Kreislinie in ihren zwei Hauptpunkten, welche jedesmal existiren. Die Polare ist also die Berührungssehne der berührenden Polstrahlen.

d) Liegt der Pol im unendlichen Raum, so geht die Collineation wieder in Uniformität über, die Polare ist der auf den Polstrahlen senkrechte Durchmesser, welcher alle Sehnen der parallelen Polstrahlen halbirt.

e) Liegt der Pol auf der Kreislinie, so geht die Polare durch ihren Pol und berührt in demselben die Kreislinie.

Bringt man einen involutorischen Vielstrahl mit einem Kreise in Verbindung, so entdeckt man weitere Eigenschaften, welche für die Kenntniss der Kreislinie von grosser Bedeutung sind. Ist z. B. P der Scheitel eines solchen involutorischen Vielstrahls, Fig. 108 a, welcher auf dem Umfang des Kreises J liegt, und dessen Strahlen auf derselben Kreislinie die Punkte A, B, C und A′, B′, C′ bestimmen, welche den Strahlen selbst entsprechend bezeichnet sind, so heissen auch diese Punkte der Kreislinie involutorisch. Zu dieser Benennung gibt zunächst die Bemerkung Anlass, dass diese Punkte die Eigenschaft haben, mit jedem andern Punkt P′ verbunden,

wieder einen involutorischen Vielstrahl zu erzeugen. Denn, weil Vielstrahl P involutorisch ist, so ist

$$P, ABCC'B'A' \barwedge P, A'B'C'CBA \text{ (§. 31)}$$

aber nach §. 66 ist

$$P', ABCC'B'A' \barwedge P, ABCC'B'A' \text{ und}$$

$$P', A'B'C'CBA \barwedge P, A'B'C'CBA,$$

folglich auch $P', ABCC'B'A' \barwedge P, A'B'C'CBA$.

Es ist also auch der Vielstrahl P' involutorisch. Denkt man sich nun durch die Punkte A, B, C, A', B', C' Tangenten an den Kreis gezogen, so wird man vermöge §. 67 sogleich schliessen, dass auch die Schnittpunkte α, β, γ, α', β', γ', welche sie auf der Tangente des Punktes P hervorbringen, solche Lage haben, dass $\alpha\beta\gamma\gamma'\beta'\alpha' \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\gamma\alpha\beta$, das heisst, dass diese Schnittpunkte die Tangenten des Punktes P, und ebenso auch jede andere Tangente desselben Kreises involutorisch theilen.

Man wird sich auch sogleich überzeugen, dass die schon oft erwähnten Eigenschaften der Involution hier ihre Anwendung haben, dass nämlich wie die Involution des involutorischen Vielstrahls durch zwei Paare von homologen Strahlen bestimmt ist, auch die involutorischen Punkte, welche er auf der Kreislinie bezeichnet, durch zwei Paare von homologen Punkten A, B und A', B' vollkommen bestimmt ist, so dass zu jedem weiteren Punkt C nur ein einziger zugehöriger homologer Punkt existirt. Man wird ferner ebenso schliessen, dass, wie der involutorische Vielstrahl zwei Fälle der einstimmigen und entgegengesetzten Aufeinanderfolge seiner Strahlen unterscheiden lässt, auch an den involutorischen Punkten der Kreislinie diese Unterscheidung sich offenbaren muss, dass ferner bei der einstimmigen Aufeinanderfolge wie im Vielstrahle keine Hauptstrahlen, so auf der Kreisinvolution keine Hauptpunkte existiren; dass aber bei der entgegengesetzten Aufeinanderfolge durch die zwei Hauptstrahlen des Vielstrahls auch auf der Kreislinie zwei Hauptpunkte der Kreisinvolution bezeichnet werden. Man wird endlich weiter schliessen, dass wie die zwei Hauptstrahlen mit einem jeden andern Paar ho-

mologer Strahlen einen harmonischen Vielstrahl erzeugen, auch die zwei Hauptpunkte der Kreislinie mit jedem andern Paar homologer Punkte vier harmonische Punkte bezeichnen, das heisst, dass solche harmonische Punkte die Eigenschaft haben, mit jedem Punkt der Kreisperipherie verbunden, einen harmonischen Vielstrahl zu bilden, und dass ihre Tangenten jede andere Tangente harmonisch theilen.

Diese Eigenschaften der involutorischen Punkte der Kreislinie wären so weit schon merkwürdig genug, um die Kreisinvolution zu charakterisiren, allein diese Benennung kommt ihr noch in einem wesentlicheren Sinne zu. Hiervon soll jetzt die Rede sein. Sind nämlich die Punkte A, B, C, C', B', A' des Kreises J involutorisch, so bilden sie mit einem beliebigen andern Punkt P des Umfanges verbunden den involutorischen Vielstrahl P, ABCC'B'A'. Zieht man nun noch in A und A' die Tangenten Aα und A'α,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{so ist} & \text{Vielstrahl A, } \alpha BCC'B'A' \barwedge P,\ ABCC'B'A' \\ \text{und} & \text{Vielstrahl A}',\ \alpha B'C'CBA \barwedge P,\ A'B'C'CBA \end{array}\right\}\ \text{§. 66,}$$

weil aber der Vielstrahl P nach Voraussetzung involutorisch ist,
so ist auch Vielstrahl P, ABCC'B'A' $\barwedge$ P, A'B'C'CBA,
folglich Vielstrahl A, αBCC'B'A' $\barwedge$ A', αB'C'CBA.

Nun sind aber auf der Scheitellinie dieser Vielstrahlen A und A' zwei homologe Strahlen vereinigt, die Vielstrahlen sind also nicht nur conform, sondern sie befinden sich auch in perspektivischer Lage (§. 33). Die Convergenzpunkte β, γ, β', γ' der homologen Strahlen liegen somit in einer Richtung MN.

Mit dem gleichen Rechte wird man auch schliessen, wenn man zwei andere homologe Punkte B und B' mit den übrigen homologen Punkten der Involution verbindet, dass die homologen Strahlen auf einer und derselben geraden Richtung liegen. Weil nun aber zwei Paare solcher Verbindungslinien wie AB und A'B', AB' und A'B mit denen der Vielstrahlen A und A' übereinstimmen, und weil durch die Convergenzpunkte β und β' jener zwei Paare die Lage einer Geraden vollkommen bestimmt ist, so wird man schliessen, dass die Convergenzpunkte der homologen Strahlen der Vielstrahlen

B und B′ auf derselben Geraden MN convergiren, wie diejenigen der Vielstrahlen A und A′; kurz alle Richtungen, welche zwei Paare homologer Punkte mit einander verbinden, convergiren auf einer und derselben Geraden MN. Diese Eigenschaft wird sogleich den Gedanken erwecken, dass die involutorischen Punkte der Kreislinie überhaupt homologe Punkte zweier involutorischen Collineationssysteme seien, und dass die Gerade MN die Collineationsaxe derselben sein werde. Diese Vermuthung wird auch gerechtfertigt. Denn drei solcher Linienpaare AB und A′B′, BC und B′C′, AC und A′C′, welche in den Punkten β, γ und δ der Geraden MN convergiren, gehören nach §. 55 zweien collineären Dreiecken an, die sich in perspektivischer Lage befinden, so dass die Verbindungslinie AA′, BB′ und CC′ in einem Punkt O, dem Collineationscentrum, convergiren. Dasselbe Gesetz ist für jedes weitere Paar homologer Punkte anwendbar, und der Convergenzpunkt O ist schon durch zwei Paare von homologen Punkten bestimmt; es müssen daher alle Verbindungslinien der homologen Paare in einem und demselben Punkt O convergiren. Es sind also wirklich die involutorischen Punkte der Kreislinie homologe Punkte zweier involutorischen Collineationssysteme für eine Axe MN und ein Centrum O.

Man kann diesen Satz auch umkehren, weil die ganze Kreisinvolution schon durch zwei homologe Paare von Punkten gegeben ist, welche das Centrum O und die Axe MN bestimmen. So oft man also von einem Punkt O aus gerade Richtungen durch den Kreis zieht, so bezeichnen sie involutorische Punkte der Kreislinie, welche die Eigenschaft haben, dass die homologen Verbindungslinien (Sehnen), so wie auch die homologen Tangenten des Kreises auf einer und derselben Geraden MN convergiren.

Der Kürze halber mag hier schon das Centrum und die Axe einer Kreisinvolution durch die Benennungen Pol und Polare ersetzt werden. Man wird jetzt sich erinnern, dass zwei homologe Punkte zweier involutorischen Systeme Centrum und Axe harmonisch trennen, §. 48, b, und man wird daraus

abstrahiren, dass diess auch bei der Kreisinvolution geschehen muss, und dass auch umgekehrt jedes Paar homologer Punkte durch ihren Pol und ihre Polare harmonisch getrennt werden, und dass auch die Polare durch diese Eigenschaft, die einer Umkehrung fähig ist, construirt werden kann, wenn man auf den Sehnen der Polstrahlen zu dem Pole je den vierten Punkt der harmonischen Theilung aufsucht. Unter den Polstrahlen ist derjenige besonders zu beachten, welcher durch den Mittelpunkt J des Kreises geht. Er bezeichnet zwei homologe Punkte (Fig. 42), P und P′, deren Tangenten auch homolog sind, und auf der Polare MN convergiren. Die Tangenten des Durchmessers PP′ sind aber parallel zu einander; ihr Convergenzpunkt, durch welchen auch die Axe MN geht, liegt also im unendlichen Raum. Die Polare MN ist also diesen Tangenten parallel und steht auch wie sie auf dem Centralstrahl JO senkrecht. Diese Bemerkung hat Interesse, wenn man zu einer gegebenen Polare MN ihren Pol O finden soll. Denn nun weiss man, dass der auf MN senkrechte Durchmesser PP′ durch den gesuchten Pol geht, und zwei homologe Punkte P, P′ bezeichnet. Verbindet man also diese zwei Punkte mit einem Punkt δ der Polare MN durch Gerade, bemerkt die Schnittpunkte D und D′ dieser Geraden mit der Kreislinie, so sind auch sie zwei homologe Punkte, und die Verbindungslinie DD′ derselben convergirt mit PP′ in dem gesuchten Pol O. Soll zum Pol O die Polare gefunden werden, so ist die Construction noch einfacher, indem durch jedes Paar Polstrahlen je zwei Paare homologer Punkte A und A′, B und B′ bestimmt, die Convergenzpunkte γ und γ' der Verbindungslinien dieser vier Punkte und die Polare MN sogleich gezeichnet werden können.

Was aber in Betreff der besonderen Fälle der Kreisinvolution gesagt ist, ergibt sich so unmittelbar aus den Eigenschaften des involutorischen Vielstrahls, §. 31, und aus der Eigenschaft der harmonischen Theilung, §. 7, dass nicht nöthig ist, weiter davon zu sprechen. Nur was von den Hauptpunkten der Kreisinvolution gesagt ist, dass nämlich die Polare durch

dieselben gehe, und dass die Tangenten derselben durch den Pol gehen, mag besonders erwähnt und hiebei daran erinnert werden, dass die Hauptpunkte der Involution nach §. 46 nothwendig Punkte der Collineationsaxe, also der Polare, sind, und dass, weil in jedem derselben zwei homologe Punkte zusammenfallen, auch die Tangenten dieser homologen Punkte in einer Richtung zusammenfallen, aber eben desswegen nach §. 46, a zu den Collineationsstrahlen gehören, und also durch den Pol gehen.

C. Der involutorische Vielstrahl.

§. 72. Die Kreisinvolution gibt auch ihrerseits wieder ihre besonderen Aufschlüsse über den involutorischen Vielstrahl, sie zeigt:

a) Wenn zwei Paare der homologen Strahlen eines involutorischen Vielstrahls senkrecht aufeinander stehen, so stehen auch alle andern Paare der homologen Strahlen desselben Vielstrahls senkrecht auf einander. Umgekehrt ist jeder Vielstrahl, der aus Strahlen gebildet wird, die paarweise senkrecht auf einander stehen, involutorisch. In diesem besondern Fall mag der involutorische Vielstrahl rechtwinklig heissen.

b) In jedem involutorischen Vielstrahl gibt es immer ein Paar homologer Strahlen, welche senkrecht auf einander stehen, wenn der Vielstrahl aber nicht rechtwinklig ist, so gibt es auch nur ein einziges Paar solcher senkrechter homologer Strahlen; alle andern Paare stehen schief auf einander. Diese zwei senkrecht auf einander stehenden homologen Strahlen sollen Normalstrahlen heissen.

c) Der involutorische Vielstrahl einstimmiger Aufeinanderfolge hat zwar zwei Normalstrahlen, aber keine Hauptstrahlen. Der involutorische Vielstrahl entgegengesetzter Aufeinanderfolge hat sowohl zwei Hauptstrahlen, als auch zwei Normalstrahlen. Je zwei homologe Strahlen bilden mit den zwei Hauptstrahlen einen harmonischen Vierstrahl.

d) Die zwei Normalstrahlen und die zwei Hauptstrahlen des letztern Falles bieten einen besondern Fall des harmonischen Vierstrahls dar, der dadurch ausgezeichnet ist, dass die Normalstrahlen die Winkel halbiren, welche die Hauptstrahlen mit einander machen.

Umgekehrt: so oft in einem harmonischen Vierstrahl zwei nicht auf einander folgende Strahlen Winkel bilden, welche von den zwei übrigen Strahlen halbirt werden, so stehen die letztern senkrecht aufeinander.

Ferner: So oft man die Nebenwinkel zweier Strahlen durch zwei Gerade halbirt, so erhält man den besondern Fall des harmonischen Vierstrahls.

Die Involution des Kreises ist geeignet, einige Aufschlüsse über den involutorischen Vielstrahl zu geben, die werth sind, dass man etwas dabei verweile. Fällt nämlich der Pol O der Kreisinvolution (Fig. 109) mit dem Mittelpunkt O des Kreises zusammen, so sind die Endpunkte A und A′, B und B′, C und C′ der Kreisdurchmesser homologe Punkte, §. 70; verbindet man nun diese Punkte mit irgend einem andern Punkt P des Kreisumfanges, so erhält man einen involutorischen Vielstrahl (§. 69). in welchem je zwei homologe Strahlen PA und PA′, PB und PB′ etc. senkrecht auf einander stehen. Umgekehrt folgt auch, wenn man die Strahlen eines Vielstrahls paarweise senkrecht auf einander zieht, dass ein Vielstrahl entsteht, der nothwendig involutorisch ist, weil ein durch den Scheitel P dieses Vielstrahls gehender Kreis die senkrechten Strahlen stets in den Endpunkten eines Durchmessers schneidet, so dass also die Verbindungslinien AA′, BB′ etc. im Mittelpunkt des Kreises convergiren. In diesem Fall zeigt aber der Umkehrungssatz, §. 70, dass der Vielstrahl involutorisch ist. Und weil ein involutorischer Vielstrahl schon durch zwei Paare homologer Punkte bestimmt ist, so folgt noch weiter, dass, wenn zwei Paare eines involutorischen Vielstrahls senkrecht auf einander stehen, auch die Strahlen jedes andern Paares senkrecht auf einander stehen werden.

Liegt aber der Pol der Kreisinvolution nicht im Mittelpunkt J des Kreises, sondern in irgend einem andern Punkt O der Kreisfläche, Fig. 110, so kann man nur einen einzigen Strahl OJ durch den Mittelpunkt des Kreises ziehen, und nur dieser Strahl bezeichnet zwei homologe Punkte A und A′, welche zu zwei senkrechten Strahlen PA und PA′ des involutorischen Vielstrahls P führen. Alle andern Polstrahlen bilden Sehnen im Kreis wie BB′, CC′, welche zu solchen homologen Strahlen führen, die schief auf einander stehen, indem ein

Peripheriewinkel BPB′ stumpf oder spitz ist, je nachdem die Gerade BB′ mit P auf der gleichen Seite des Mittelpunktes, oder auf der entgegengesetzten liegt. Umgekehrt sieht man auch, wenn man irgend einen involutorischen Vielstrahl P hat und eine Kreislinie durch dessen Scheitel zieht, dass immer ein Paar homologer Strahlen PA und PA′ senkrecht auf einander sein müssen, dass aber sonst keine andern homologen Strahlen existiren, die senkrecht auf einander stehen, vorausgesetzt, dass der involutorische Vielstrahl nicht rechtwinklig sei.

Wenn ein involutorischer Vielstrahl eine einstimmige Aufeinanderfolge seiner Strahlen wahrnehmen lässt, so muss diese Eigenschaft auch den homologen Punktreihen ABCA′B′C′ zukommen, welche er auf der Kreislinie bezeichnet, und wie ein solcher Vielstrahl keine Hauptstrahlen hat, so können auch keine Hauptpunkte auf der Kreislinie vorkommen, da diese unmittelbar durch jene bestimmt werden. Der Pol der Involution liegt in diesem Fall in der Kreisfläche. Wenn aber der involutorische Vielstrahl eine entgegengesetzte Aufeinanderfolge seiner homologen Strahlen bemerken lässt, so müssen auch die homologen Punktreihen der Kreisinvolution eine entgegengesetzte Aufeinanderfolge zeigen, Fig, 111. Und weil ein solcher Vielstrahl P stets zwei Hauptstrahlen PM und PN hat, so müssen dieselben zwei Punkte M und N auf der Kreislinie bezeichnen, in welchen je ein Paar homologer Punkte vereinigt ist. Diese Punkte geben alsdann die Richtung MN der Involutionsaxe an, und die Tangenten dieser Punkte convergiren im Involutionscentrum O (§. 71, c). Diese Hauptstrahlen PM und PN haben die Eigenschaft, mit jedem weitern Paar homologer Strahlen PB und PB′ einen harmonischen Vierstrahl zu bilden, §. 31.

Unter allen harmonischen Vierstrahlen ist derjenige ausgezeichnet, welcher durch die zwei Normalstrahlen PA und PA′ gebildet wird. Der Polstrahl AA′, der zu diesen Normalstrahlen gehört, ist ein Durchmesser, welcher senkrecht auf der Involutionsaxe MN steht (§. 70, b), und welcher sowohl die

Sehne MN als auch ihre Bögen halbirt. Folglich ist AM = AN, A'M = A'N. Man schliesst hieraus, dass auch die Peripheriewinkel MPA' und NPA', welche die Hauptstrahlen und Normalstrahlen mit einander machen, einander gleich sind. Die Normalstrahlen und Hauptstrahlen eines involutorischen Vielstrahls bilden daher immer einen solchen harmonischen Vierstrahl, in welchem zwei nicht aufeinder folgende Strahlen senkrecht aufeinander stehen und zugleich die Winkel halbiren, welche die andern Strahlen mit einander machen. Man sieht leicht, wie dieser Satz auch umgekehrt werden kann. Zu denselben Resultaten führt aber auch schon der harmonische Vierstrahl, welchen man dadurch erhält, dass man seine Strahlen mit den Seiten und Diagonalen eines Parallelogramms parallel zieht. Der besondere Fall, von dem im Vorausgehenden die Rede ist, tritt nämlich allemal ein, wenn das Parallelogramm die Gestalt eines Rhombus oder Rechtecks hat; es wird übrigens genügen, hierauf aufmerksam gemacht und auf die Figur 10 hingewiesen zu haben, die hiezu gezeichnet worden ist.

D. Reciprocität des Kreises.

§. 73. Wenn zwei ebene Systeme so auf einander bezogen werden, dass jedem einförmigen Grundgebilde des einen Systems wieder ein einförmiges Grundgebilde des andern Systems entspricht, und wenn diese sich entsprechenden einförmigen Grundgebilde gleicher Art sind, so heissen die Systeme collineär. Wenn aber diese sich entsprechenden einförmigen Gebilde ungleicher Art sind, so dass jeder geraden Punktreihe des einen Systems ein Vielstrahl des andern Systems, und jedem Vielstrahl des ersten Systems eine gerade Punktreihe des andern Systems entspricht, dann heissen die Systeme reciprok. Auch findet bei den reciproken Systemen immer noch die Uebereinstimmung statt, dass die homologen einförmigen Gebilde, wenn schon ungleicher Art, doch conform sind.

§. 74. Untersucht man die Beziehungen, welche zwischen mehreren Polen und Polaren der Kreisinvolution stattfinden, so überzeugt man sich sogleich, dass alle Punkte der Ebene, welche als Pole betrachtet werden, ein ebenes System zusammensetzen, welches demjenigen reci-

prok ist, das durch ihre Polare gebildet wird. Diess erhellt aus folgenden Sätzen:

a) Geht eine Gerade durch den Pol einer andern Geraden, so liegt auch auf ihr der Pol der letzteren.

b) Liegen mehrere Pole in einer Richtung, so gehen ihre Polaren durch einen einzigen Punkt, nämlich durch den Pol jener Richtung, und bilden somit einen Vielstrahl, welcher der Reihe jener Pole auf reciproke Weise homolog ist.

c) Convergiren mehrere Gerade in einem Punkt, so dass sie einen Vielstrahl bilden, so liegen ihre Pole in einer Richtung, und bilden eine gerade Reihe von Punkten, welche jenem Vielstrahl auf reciproke Weise homolog ist.

d) Ein Vielstrahl und eine Reihe von Punkten, welche in dem System des Kreises in reciproker Weise homolog sind, sind auch immer conform.

Der Begriff der Collineation ist durchaus nothwendig, sobald man den Weg der neueren Geometrie eingeschlagen hat, welcher die Absicht hat, ebene Figuren durch das Mittel der Lage aufeinander zu beziehen; er erscheint als die nothwendige Erweiterung des Begriffes der Conformität auf beliebige ebene Figuren, auf ebene Systeme. Der Umstand aber, dass das ebene System zwei ungleichartige einförmige Grundgebilde, die Punktreihe und den Vielstrahl einschliesst, konnte dem umsichtigen Beobachter schon damals den Gedanken in's Bewusstsein rufen, dass die ebenen Systeme auch auf eine solche Weise aufeinander bezogen werden können, dass die ungleichartigen Grundgebilde sich entsprechen. Die Kreisinvolution führt übrigens von selbst zu einer solchen Beziehung, so dass der Begriff der Reciprocität als eine nothwendige Terminologie erscheint, um die Eigenschaften des Kreises in angemessene Ausdrücke einzukleiden. Es ist daher nicht nöthig, hier die Möglichkeit der Reciprocität nachzuweisen, da sie dem Leser sogleich in einer conkreten Gestalt entgegen tritt, aus der sie abstrahirt wird.

Um die Beziehungen zwischen den Polen und Polaren eines Kreises zu erforschen, betrachte man einen Punkt O in

oder ausserhalb eines Kreises (Fig. 43), so wird man seine Polare MN durch zwei Polstrahlen construiren, welche die homologen Punkte P und P′, R und R′ auf der Kreislinie bezeichnen, indem man die Convergenzpunkte M und N der homologen Verbindungslinie jener Punkte aufsucht. Es folgt aber aus §. 68 c, dass die Diagonale MN des Vierecks PRP′R′ durch den Convergenzpunkt T der Tangenten der Punkte P und P′ gehen muss. Nach §. 71, c ist aber der Punkt T der Pol der Geraden PP′. Es hat also jede durch den Pol O gehende Gerade die Eigenschaft, dass ihr Pol wieder auf der Polare MN liegt. Diese Gegenseitigkeit ist von bedeutenden Consequenzen. Convergiren nämlich mehrere Geraden A𝔄, B𝔅, Cℭ etc. (Fig. 44) in einem Punkt O, welcher die Gerade MN zur Polare hat, so müssen dem Vorausgehenden gemäss auch die Pole A′, B′, C′ dieser Geraden auf der Polare MN liegen (§. 74, a).

Umgekehrt: sind die Punkte A′, B′, C′ einer geraden Richtung MN gegeben, und man construirt ihre Polaren A𝔄, B𝔅, Cℭ, so muss jede derselben (nach §. 74, a) den Pol O von der Richtung MN enthalten, und weil sie sonach den Punkt O gemeinschaftlich haben, so müssen sie in demselben convergiren. Nun können aber alle Punkte der Ebene als Pole des Kreises betrachtet werden und setzen in dierer Eigenschaft ein ebenes System zusammen. Zu jedem solchen Punkt gehört aber eine Polare; die Polaren aller jener Pole setzen also ebenfalls ein ebenes System zusammen, das jenem so entspricht, dass jedem Punkt des ersten Systems eine Gerade des zweiten Systems homolog ist. Jeder Punktreihe A, B, C des ersten Systems entspricht ein Vielstrahl des zweiten, und daher auch jeder Richtung MN ein Punkt, und folglich auch jedem Vielstrahl des ersten Systems eine Punktreihe des zweiten. Kurz, das System der Pole, welches seinerseits auch Linien und Vielstrahlen einschliesst, entspricht dem System der Polaren, welches aus Punkten und Linien besteht, so dass jedem Punkt des einen Systems eine Gerade des andern, jeder Punktreihe des einen ein Vielstrahl des andern, und jedem

Vielstrahl des einen eine Punktreihe des andern entspricht; kurz, diese zwei ebenen Systeme bieten Alles dar, was von zwei reciproken Systemen verlangt wird.

Will man zu einem gegebenen Vielstrahl des einen Systems die homologe Punktreihe des andern construiren, so kann man die Sache sehr abkürzen. Man darf nur vom Mittelpunkt J aus die Senkrechten J𝔄, J𝔅, Jℭ auf die betreffenden Strahlen fällen, was mittelst eines über JO als Durchmesser beschriebenen Kreises leicht geschieht, dann werden diese Senkrechten auf der Polare MN des Punktes O die gesuchten Pole A′, B′, C′ sogleich bestimmen. Denn die Pole der Geraden A𝔄, B𝔅 etc. liegen je auf den Centralrichtungen J𝔄, J𝔅 etc. (§. 70, b), und zugleich liegen sie auf der Polare MN (§. 74, c). Die Schnittpunkte A′, B′, C′ sind also die gesuchten Pole selbst. Man sieht leicht, wie man auf demselben Wege auch zu einer gegebenen Punktreihe des einen Systems den homologen Vielstrahl des andern Systems construiren kann. Zugleich zeigt aber diese Construction auch, dass der gegebene Vielstrahl O und der Vielstrahl J, welcher durch die Centralrichtungen gebildet wurde, einander gleich sind, da ihre Strahlen senkrecht auf einander stehen. Gleiche Vielstrahlen sind aber auch conform, und die Punktreihe A′, B′, C′ des einen Systems ist also auch dem Vielstrahl O, ABC des andern Systems conform. Man sieht hieraus, dass die homologen Gebilde der reciproken Systeme eines Kreises, obgleich sie nicht gleicher Art sind, doch an der Eigenschaft der Conformität Theil haben, wie diess auch bei den collineären Systemen der Fall ist.

E. Polarität des Kreises.

§. 75. Wenn zwei reciproke Systeme zugleich involutorisch liegen, und von ihnen als von einem System gesprochen wird, so heisst dasselbe ein Polarsystem. Die reciproken Systeme des Kreises haben diese Eigenschaft und bilden also ein Polarsystem, und diess ist der Grund, warum Involutionscentrum und Involutionsaxe im Kreis auch Pol und Polare genannt wurden.

Wenn der eine von zwei Punkten eines ebenen Polarsystems in der Polare des andern, und also auch der andere in der Polare des ersteren liegt, so heissen sowohl die beiden Punkte, als auch die beiden Geraden, deren jede durch den Pol der andern geht, einander **conjugirt**. Man wird also in Betreff der Kreispolarität folgende Fälle zu unterscheiden haben.

a) Jeder Punkt in der Ebene des Kreises ist allen Punkten, welche in seiner Polare liegen, und jede Gerade ist allen Geraden, welche durch ihren Pol gehen, conjugirt.

b) Liegt ein Punkt auf der Kreislinie, so ist er sich selbst und allen Punkten seiner Tangente conjugirt, und berührt eine Gerade die Kreislinie, so ist sie sich selbst und allen Geraden, welche durch ihren Berührungspunkt gehen, conjugirt.

c) Sind zwei Punkte einem und demselben Punkte conjugirt, so ist dieser der Pol der durch die beiden ersten Punkte bestimmten Geraden. Sind zwei Gerade einer und derselben Geraden conjugirt, so ist diese die Polare des durch die beiden ersten Geraden bestimmten Punktes.

d) In jedem in den Kreis beschriebenen vollständigen Viereck sind die Diagonalen einander paarweise conjugirt. In jedem Vierseit, das um einen Kreis beschrieben wird, sind die drei Convergenzpunkte der gegenüberstehenden Seiten einander paarweise conjugirt. In diesen Dreiecken, sei es, dass sie durch die drei Diagonalen oder durch die Eckpunkte der Gegenseiten gebildet werden, ist jedes Eck der Pol der gegenüberstehenden Seite, und jede Seite die Polare des gegenüberstehenden Eckpunktes; solche Dreiecke heissen Polardreiecke.

§. 76. Einem besonderen Gesetze sind noch die conjugirten Elemente einer Richtung und eines Vielstrahls unterworfen.

a) Die Paare von conjugirten Punkten, welche in einer Richtung liegen, bilden eine involutorische Punktreihe.

b) Die Paare von conjugirten Linien, welche durch einen Punkt gehen, bilden einen involutorischen Vielstrahl.

c) Liegt ein Punkt in der Kreisfläche, so bilden die durch ihn gehenden Paare conjugirter Linien einen involutorischen Vielstrahl einstimmiger Aufeinanderfolge, der keine Hauptstrahlen hat. Liegt eine Gerade ausserhalb der Kreisfläche, so bilden die auf ihr liegenden Paare conjugirter Punkte eine involutorische Reihe einstimmiger Lage, welche keine Hauptpunkte hat. Zwei conjugirte Durchmesser stehen senkrecht aufeinander.

d) Liegt ein Punkt ausserhalb der Kreisfläche, so bilden die durch denselben gehenden Paare conjugirter Linien einen involutorischen Vielstrahl entgegengesetzter Aufeinanderfolge, der zwei Hauptstrahlen hat, welche die Kreislinie berühren. Schneidet eine Gerade einen Kreis, so bilden die auf ihr liegenden Paare conjugirter Punkte eine involutorische Reihe entgegengesetzter Aufeinanderfolge, die zwei Hauptpunkte hat, welche auf der Kreislinie liegen.

Bei den reciproken Systemen des Kreises ist noch ein Umstand von Wichtigkeit, der nicht zu übersehen ist. Sind nämlich Figur 44 die Punkte A′, B′, C′ des ersten Systems den Geraden A𝔄, B𝔅, Cℭ des zweiten Systems homolog, welche in dem Punkt O convergiren, so ist auch die Richtung MN jener Punkte des ersten Systems dem Convergenzpunkt O jener Geraden des zweiten Systems homolog (§. 73). Es ist aber auch der Pol O, sofern ein Punkt des ersten Systems in ihm liegt, der Polare MN des zweiten Systems homolog (§. 74, b). Sowohl eine Gerade des ersten Systems als auch eine Gerade des zweiten Systems entsprechen also, wenn sie in einer Richtung MN vereinigt sind, solchen homologen Punkten, welche ebenfalls wieder in einem einzigen Punkte vereinigt sind. Die zwei reciproken Systeme des Kreises liegen also involutorisch, und setzen somit ein Polarsystem zusammen. Die Punkte nun, welche wie O und A′ eine solche Lage gegen einander haben, dass jeder auf der Polare des andern Punktes liegt (§. 74, a), so wie auch solche Geraden, von welchen jede wie die Geraden MN und A𝔄 durch den Pol der andern geht, heissen einander conjugirt. Weil nun aber alle Punkte A′, B′, C′ einer geraden Richtung MN solchen Geraden homolog sind, welche durch den Pol O gehen, und andererseits alle in O convergirenden Geraden ihre Pole auf MN haben, so folgt, dass der Punkt O allen Punkten A′, B′, C′ etc. seiner Polare conjugirt ist, und ebenso auch dass die Gerade MN allen Geraden A𝔄, B𝔅 etc. conjugirt ist, welche durch ihren Pol O gehen. Auch folgt ferner, wenn die Punkte A′ und B′ einem dritten Punkt O conjugirt sind, dass die Richtung MN der ersteren, die Polare des Punktes O ist,

und umgekehrt: wenn die Geraden A𝔄 und B𝔅 der dritten Geraden MN conjugirt sind, dass der Convergenzpunkt O der zwei ersteren Geraden der Pol von MN ist. Es können auch drei Punkte und drei Gerade paarweise einander conjugirt sein. Ist z. B. ABCD ein inbeschriebenes Viereck, Figur 41, dessen drei Paare der gegenüberstehenden Seiten in den Punkten O, E und F convergiren, so kann man F als Pol betrachten, und die Punkte A und B, D und C als homologe Punkte der Kreisinvolution, folglich ist die Gerade OE die Polare des Punktes F (§. 70). Die Convergenzpunkte O und E, welche auf der Polaren des Punktes F liegen, sind also dem Punkt F conjugirt. Ebenso zeigt man auch, dass der Punkt E den Punkten O und F, und der Punkt O den Punkten F und E conjugirt ist. Zugleich sieht man hieraus, dass OE die Polare von F, OF die Polare von E, und EF die Polare von O ist. Die drei Punkte bilden also ein Polardreieck OFE. Auf gleiche Weise findet man auch, dass die Diagonalen OF, OE und EF eines umbeschriebenen Vierecks GHIKLM einander paarweise conjugirt sind, und ein Polardreieck OEF bilden, dessen Seiten die Polaren der gegenüberstehenden Ecken bilden. Man sieht, wie durch den Begriff der Polarität die Eigenschaften des in- und umbeschriebenen Vierecks auf einen gemeinschaftlichen Ausdruck gebracht werden.

Es ist noch zu untersuchen, welchem Gesetz die Punkte einer Geraden und die Strahlen eines Vielstrahls, welche paarweise einander conjugirt sind, unterworfen sind. Es sei daher O der Pol der Geraden MN, Fig. 112, und auf MN nehme man die Punkte α, β, γ beliebig und construire ihre Polaren A𝔄, B𝔅, C𝔆, welche die Gerade MN in den Punkten α', β' und γ' schneiden, so sind die Punkte α und α', β und β', γ und γ' einander conjugirt (§. 75, a). Ebenso sind auch die Geraden $O\alpha$ und $O\alpha'$, $O\beta$ und $O\beta'$, $O\gamma$ und $O\gamma'$ einander zugeordnet, und es ist auch α' der Pol von $O\alpha$, β' der Pol von $O\beta$, γ' der Pol von $O\gamma$. Nach dem Gesetz der Reciprocität (§. 74, d) ist aber die Punktreihe $\alpha'\beta'\gamma'\alpha\beta\gamma$, welche durch die Pole der Strahlen des Vielstrahls O, $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ gebildet wird,

diesem Vielstrahl conform, es ist also die Punktreihe $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$, welche durch die Strahlen jenes Vielstrahls unmittelbar bezeichnet wird, der Reihe $\alpha'\beta'\gamma'\alpha\beta\gamma$, welche durch ihre Pole bezeichnet wird, conform, d. h. es ist die Reihe $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ und folglich auch der Vielstrahl O, $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ involutorisch. §. 21.

Wenn man die Figuren 112, a und b betrachtet, so wird man sogleich die zwei Unterschiede bemerken, welche eintreten, je nachdem die Reihen der einander zugeordneten Punkte den Kreis schneiden oder nicht, und je nachdem die Scheitel des Vielstrahls, dessen Strahlen paarweise einander zugeordnet sind, innerhalb oder ausserhalb der Kreisfläche liegen. Die Durchführung im Einzelnen kann dem Leser überlassen bleiben.

F. Aehnlichkeit der Kreise.

§. 77. Jede zwei Kreise einer Ebene sind ähnliche Curven in perspektivischer Lage für zwei Aehnlichkeitspunkte, welche ihre Mittelpunkte im Verhältniss ihrer Halbmesser harmonisch trennen, dabei ist noch zu bemerken:

a) Dass die Mittelpunkte der Kreise selbst homologe Punkte sind.

b) Dass zwei parallele Halbmesser stets auch zwei homologe Linien sind, und also auf den Kreislinien homologe Punkte bezeichnen. Sind zwei parallele Halbmesser nach der gleichen Richtung gezogen, so bezeichnen sie zwei Punkte der Kreislinien, welche für den äusseren Aehnlichkeitspunkt homolog sind. Sind zwei Halbmesser nach entgegengesetzter Richtung gezogen, so bezeichnen sie zwei Punkte der Kreislinien, die für den inneren Aehnlichkeitspunkt homolog sind.

c) Jeder Centralstrahl, und überhaupt jedes Paar homologer Sehnen schneiden ähnliche Abschnitte von den Kreisen ab, d. h. solche Abschnitte, deren Sehnen sich verhalten, wie die Kreishalbmesser, und denen beziehlich gleiche Centri- und Peripheriewinkel entsprechen.

d) Berührt ein Collineationsstrahl einen der Kreise, so berührt er auch den andern und ist ihre gemeinschaftliche Tangente.

e) Homologe Sehnen zweier Kreise schneiden sich in homologen Punkten, theilen sich proportional, und ihre homologen Abschnitte verhalten sich wie die zwei Halbmesser der Kreise; und alle durch

solche homologe Punkte in der Kreisfläche gezogenen Parallelen sind wieder homologe Linien.

f) Die Polaren des Aehnlichkeitspunktes sind homologe Linien der zwei gegebenen Kreise.

§. 78. In Betreff der besondern Fälle ähnlicher Kreise ist überdiess noch zu bemerken:

a) Wenn sich zwei Kreise von aussen berühren, so ist ihr Berührungspunkt zugleich ihr innerer Aehnlichkeitspunkt; und wenn sich zwei Kreise von innen berühren, so ist ihr Berührungspunkt zugleich ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt.

b) Sind zwei Kreise concentrisch, so fallen beide Aehnlichkeitspunkte im Mittelpunkt des Kreises zusammen.

c) Ist der Halbmesser eines der Kreise unendlich klein, und also dieser Kreis auf einen Punkt reducirt, so fallen mit ihm die beiden Aehnlichkeitspunkte zusammen.

d) Ist der Halbmesser eines der zwei Kreise unendlich gross, so dass ein endliches Stück seiner Kreislinie in Form einer Geraden erscheint, so liegen die zwei Aehnlichkeitspunkte auf der Peripherie des endlichen Kreises, und zwar fallen sie in die Endpunkte desjenigen Durchmessers, welcher auf der Geraden senkrecht steht, die ein Stück der unendlich grossen Kreislinie darstellt.

e) Sind zwei Kreise endlicher Dimension gleich gross, so verwandelt sich ihre Aehnlichkeit in Uniformität. Ein Aehnlichkeitspunkt halbirt ihre Centraldistanz und der andere liegt in unendlicher Entfernung.

§. 79. Sind drei Kreise in einer Ebene gegeben, so gehören zu jedem Paar dieser Kreise zwei Aehnlichkeitspunkte, welche wir gleichnamig heissen, zum Gegensatz der Aehnlichkeitspunkte verschiedener Kreispaare, die ungleichnamig genannt werden. Von diesen sechs Aehnlichkeitspunkten der drei Kreise, liegen je drei ungleichnamige in einer geraden Linie, welche somit ein gemeinschaftlicher Aehnlichkeitsstrahl der Kreise ist. Drei Kreise haben daher vier gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahlen; einer derselben geht durch die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte, die drei übrigen verbinden je einen äusseren Aehnlichkeitspunkt, mit zwei andern ungleichnamigen innern Aehnlichkeitspunkten.

Jeder gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahl von drei oder mehreren Kreisen ist eine homologe Linie dieser Kreise; wenn er also einen der Kreise schneidet, so schneidet er auch die anderen zwei Kreise, und bildet in ihnen ähnliche Abschnitte; wenn er einen der drei Kreise be-

rührt, so berührt er auch die zwei anderen Kreise; wenn er einen der Kreise nicht schneidet, so schneidet er auch keinen der drei anderen Kreise.

Ueberhaupt hat jeder gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahl mehrerer Kreise eine solche Lage, dass die Halbmesser der Kreise und die Entfernungen ihrer Mittelpunkte von dem gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl ein constantes Verhältniss zu einander haben.

§. 80. Von besonderen Fällen dreier Kreise, die in einer Ebene gegeben sind, ist zu bemerken:

a) Wenn ein Kreis zwei andere Kreise berührt, so liegen die Berührungspunkte des ersten Kreises auf einem Aehnlichkeitsstrahl der letzteren Kreise, und zwar ist bei einer gleichartigen Berührung dieser Aehnlichkeitsstrahl ein äusserer, und bei einer ungleichartigen Berührung ein innerer.

b) Wenn ein Kreis zwei andere Kreise berührt, und man verbindet einen Punkt seiner Peripherie mit den Berührungspunkten, so schneiden die Verbindungslinien die zwei andern Kreise in homologen Punkten, die übereinstimmend mit der ungleichartigen oder gleichartigen Berührung zu ihrem inneren oder äusseren Aehnlichkeitspunkt gehören.

c) Wenn ein Kreis zwei andere Kreise berührt, und man verbindet zwei homologe Punkte der letzteren, die übereinstimmend mit der gleichartigen oder ungleichartigen Berührung zum äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt gehören, so schneiden sich die Verbindungslinien auf der Peripherie des Berührungskreises.

Sind zwei Kreise J und J' in einer Ebene gegeben, Figur 46, und zieht man von ihren Mittelpunkten aus parallele Halbmesser JA || J'A', JB || J'B' etc., so bilden dieselben zwei gleiche und desswegen auch conforme Vielstrahlen, welche gegen eine unendlich entfernte Axe perspektivisch liegen. Auf den homologen Strahlen dieser Vielstrahlen bezeichnen die zwei Kreislinien solche Punkte, welche proportionale Abschnitte begränzen, indem JA : J'A' = JB : J'B'. Man schliesst hieraus, dass die zwei Kreislinien homologe Curven zweier ähnlichen und perspektivisch liegenden Systeme sind, deren Centrum O durch die Verbindungslinien AA', BB', welche in demselben convergiren, bestimmt wird und dass der Modulus dieser Collineation dem Verhältniss der Kreishalbmesser JA :

J'A' gleich ist (§. 53). Es ist jedoch zu bemerken, dass man zu jedem Punkt A der einen Kreislinie zwei homologe Punkte A' und $\mathfrak{A}'$ erhält, der eine wird durch den in gleicher Richtung gezogenen Halbmesser, der andere durch einen Halbmesser, der in entgegengesetzter Richtung gezogen ist, bestimmt. Wir erhalten also homologe Punkte der gleichartigen Lage (A und A'), und homologe Punkte der ungleichartigen Lage (A und $\mathfrak{A}'$). Der Aehnlichkeitsstrahl AA' der homologen Punkte der gleichartigen Lage durchschneidet die Centraldistanz JJ' in einem äussern Punkt O, der Aehnlichkeitsstrahl $A\mathfrak{A}'$ der homologen Punkte der ungleichartigen Lage durchschneidet die Centraldistanz unmittelbar in dem Aehnlichkeitspunkt O'. Die Kreise sind also sowohl für den äusseren als für den inneren Aehnlichkeitspunkt homolog. Aus dieser Deduktion leuchtet von selbst ein, dass die Mittelpunkte J und J' als die Scheitel der homologen Vielstrahlen ebenfalls homologe Punkte sind. Und wenn man das Viereck $A\mathfrak{A}\mathfrak{A}'A'$ in's Auge fasst, so wird man bemerken, dass die Punkte J und J', welche auf den Seiten $A\mathfrak{A}$ und $A'\mathfrak{A}'$ liegen, durch die Punkte O und O' harmonisch getrennt werden (§. 41, d), und dass der Modulus der harmonischen Theilung $JO : J'O = JA : J'\mathfrak{A}'$ dem Verhältniss der Halbmesser gleich ist.

Alle folgende Sätze 77, c, d, e, f sind nichts Anderes, als eine Wiederholung der Sätze 53 und 62, dass es nicht nöthig scheint, weiter darauf einzugehen. Man kann nur etwa das noch bemerken, dass Bogen $AB \backsim A'B'$, weil $JA \parallel J'A'$, $JB \parallel J'B'$, folglich $< AJB = < A'J'B'$.

In dem besondern Fall, dass sich zwei Kreise von aussen berühren, Fig. 47, liegt der Berührungspunkt O auf der Richtung der Centralen JJ' und hat eine solche Lage, dass er die Centraldistanz im Verhältniss des Kreishalbmessers theilt, somit ist er ihr innerer Aehnlichkeitspunkt. Berühren sich die Kreise von innen, Fig. 48, so liegt der Berührungspunkt auf der Verlängerung der Centraldistanz JJ', und zwar hat er eine solche Lage, dass die Abschnitte OJ und OJ' dem Verhältniss der Kreishalbmesser gleich sind, der Punkt O ist also

ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt. Der Aehnlichkeitspunkt zwischen einem Kreis J und einer Geraden MN, Figur 49, die als das endliche Stück einer unendlich grossen Kreislinie betrachtet wird, kann ganz regelmässig dadurch construirt werden, dass man eine Gerade J′A′ ⊥ MN zieht, um einen Halbmesser J′A′ des unendlich grossen Kreises zu haben, und nun im endlichen Kreis den Durchmesser 𝔄A parallel J′A′ zieht. Weil aber parallele Halbmesser zweier Kreise homologe Punkte bezeichnen, so sind die Punkte A und A′, 𝔄 und A′ homologe Punkte der gleichartigen und ungleichartigen Lage. Die Punkte A und 𝔄 sind aber die Aehnlichkeitspunkte selbst, weil sie bereits auf dem Centralstrahl liegen, und weil die Verbindungslinien AA′ und 𝔄A′, die Centrale eben nur in diesen Punkten A und 𝔄 selbst schneiden; und zwar ist A der äussere und 𝔄 der innere Aehnlichkeitspunkt, so fern man voraussetzt, dass der Mittelpunkt des unendlich grossen Kreises mit dem Punkte J auf einerlei Seite der Geraden MN liege, da bei dieser Voraussetzung die Halbmesser JA und J′A′ nach der gleichen Richtung gehen, während JA und J′A′ entgegengesetzte Richtung haben. Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass eben die hier ausgesprochene Voraussetzung eine Willkürlichkeit enthält, und dass man auch annehmen kann, dass der Mittelpunkt des unendlich grossen Kreisses auf der entgegengesetzten Richtung liege. Bei der letzten Annahme stellt sich aber der Punkt A als innerer und der Punkt 𝔄 als äusserer Aehnlichkeitspunkt heraus. Es bleibt dem gemäss über die nähere Bezeichnung des Aehnlichkeitspunktes eine Zweideutigkeit übrig, die in der Natur der Sache liegt und nicht hinwegzuräumen ist.

Dass die zwei Aehnlichkeitspunkte zwischen einem Punkt in einem endlichen Kreis mit dem Punkt zusammenfallen, fällt in die Augen. Sind zwei Kreise concentrisch, so fallen je zwei parallele Halbmesser aufeinander, die Aehnlichkeitsstrahlen convergiren alle im gemeinschaftlichen Mittelpunkt der concentrischen Kreise, dort ist also auch ihr Aehnlichkeitspunkt, und zwar sowohl ihr äusserer als ihr innerer. Sind

endlich zwei Kreise gleich gross, so ist das Verhältniss ihrer Collineation gleich Eins, folglich liegt ihr innerer Aehnlichkeitspunkt in der Mitte der Centraldistanz, und ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt in unendlicher Entfernung (§. 3).

Sind drei Kreise A, B, C gegeben, Fig. 50, und sind α und α', β und β', γ und γ' ihre Aehnlichkeitspunkte, so sind die drei Kreise für eine und dieselbe unendlich entfernte Collineationsaxe paarweise homolog; folglich müssen je drei ungleichnamige Aehnlichkeitspunkte in einer geraden Linie liegen (§. 49, b). Ist nun $\alpha\beta\gamma$ ein gemeinschaftlicher Aehnlichkeitsstrahl der drei Kreise A, B und C, so fallen auf demselben je zwei homologe Linien eines jeden Kreispaares zusammen (§. 45, c). Derselbe schliesst also für je zwei Kreise ein Paar homologer Linien in sich. Schneidet er also einen Kreis, so muss er auch die andern Kreise schneiden und in allen drei Kreisen ähnliche Abschnitte bilden, wenn er einen Kreis berührt, so muss er die andern Kreise auch berühren (§. 77, d, e, f etc.). Zieht man nun aber von den Mittelpunkten Senkrechte $A\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $C\mathfrak{c}$ auf einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl, so sind sie unter einander parallel und als solche ebenfalls homologe Gerade der Kreise (§. 77, b), welche den Aehnlichkeitsstrahl in homologen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ schneiden werden (§. 42, e). Zwei homologe Linien zwischen homologen Punkten sind aber proportional, und ihr Verhältniss zu einander ist dem Verhältniss der Kreishalbmesser gleich. Sind daher AR, BR', CR'' die Halbmesser der Kreise, so verhält sich

$$A\mathfrak{a} : B\mathfrak{b} = AR : BR'$$
$$A\mathfrak{a} : C\mathfrak{c} = AR : CR'',$$

also
$$A\mathfrak{a} : AR = B\mathfrak{b} : BR' = C\mathfrak{c} : CR''.$$

Berührt einer der drei Kreise, etwa der Kreis C, die zwei anderen Kreise A und B von aussen (Fig. 51), so sind die Berührungspunkte α' und β' innere Aehnlichkeitspunkte (§. 78, a), welche mit dem äussern Aehnlichkeitspunkt γ der Kreise A und B in einer geraden Linie liegen (§. 79); mithin ist $\alpha'\beta'$ ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl der Kreise A und B. Das gleiche Resultat findet man, wenn der Kreis C die Kreise A

und B von innen berührt, wenn aber der Kreis C den einen Kreis A von aussen und den andern B von innen berührt, so ist β' ein innerer und α ein äusserer Aehnlichkeitspunkt, folglich wird der andere Aehnlichkeitspunkt γ', der mit β' und α in gerader Linie liegt, nothwendig ein innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise A und B sein; die Berührungspunkte der ungleichartigen Berührung liegen daher auf einem Aehnlichkeitsstrahl der Kreise A und B, der zum innern Aehnlichkeitspunkt gehört.

Verbindet man nun einen beliebigen Punkt D'' des Berührungskreises C mit den Berührungspunkten α' und β', so schneiden die Verbindungslinien $D''\alpha'$ und $D''\beta'$ die Kreise A und B nothwendig in solchen Punkten D und D', die gegen den Punkt D'' homolog liegen (§. 78, a), denn diese Verbindungslinien sind, weil sie durch die Aehnlichkeitspunkte α' und β' gehen, Aehnlichkeitsstrahlen zwischen den Kreisen C und A, C und B. Ist aber sonach D'' homolog D', so ist auch BD' || CD'',
und ist D'' homolog D, so ist auch AD || CD'',
daraus folgt, dass auch AD || BD'.

Mithin sind auch die Punkte D und D' der Kreise A und B homolog, und die Verbindungslinie DD' wird durch den Aehnlichkeitspunkt γ derselben gehen. Man wird auch leicht sehen, dass DD' durch den äussern Aehnlichkeitspunkt geht, wenn der Kreis C die Kreise A und B gleichartig, d. h. beide von aussen oder auch beide von innen berührt, dass aber DD' durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise A und B geht, wenn der Kreis C die Kreise A und B ungleichartig berührt.

Diesen letzten Satz kann man auch umkehren. Verbindet man zwei homologe Punkte D und D' mit den Berührungspunkten α und α' eines dritten Berührungskreises C, so müssen die Verbindungslinien β'D' und α'D die Kreislinie C wieder in homologen Punkten schneiden, welche nothwendig in einem Punkt D'' aufeinder fallen; denn weil D'' und D' homologe Punkte sind, so ist CD'' || BD'; und weil D''' homolog D ist, so ist auch AD || CD'''. Nun sind aber nach der Vor-

aussetzung D und D' homologe Punkte der Kreise A und B, also ist auch AD || BD'; es folgt also, dass auch CD'' || CD''', was nur möglich ist, wenn D'' und D''' aufeinander fallen. Homologe Punkte des äussern Aehnlichkeitsstrahls verbunden mit den Berührungspunkten eines gleichartig berührenden Kreises, convergiren also auch in einem Punkt der Peripherie des Berührungskreises.

G. Potenzialität der Kreise.

§. 81. Zwei Kreise einer Ebene sind sowohl für ihren inneren, als auch für ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt als Centrum nicht nur ähnlich, d. h. für eine Axe des unendlichen Raumes collineär, sondern sie sind auch für eine Axe des endlichen Raumes collineär. Diese Collineation heisst Potenzialität, und die Collineationsaxe heisst Potenzlinie.

Die Potenzialität ist durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Je zwei Punkte eines Aehnlichkeitsstrahles, deren Halbmesser nicht parallel sind und die man inverse Punkte nennen kann, sind homolog. Die Tangenten zweier inversen Punkte, welche als homologe Linien in einem Punkt der Potenzlinie convergiren, sind antiparallel, d. h. sie machen mit dem Aehnlichkeitsstrahl ihrer Berührungspunkte gleiche aber einander zugekehrte Winkel, und bilden daher ein gleichschenkeliges Dreieck mit demselben. Auch zwei homologe Sekanten sind antiparallel d. h. sie machen mit den Aehnlichkeitsstrahlen ihrer Schnittpunkte gleiche aber versetzte Winkel.

b) Die Potenzlinie ist mit den Polaren des Aehnlichkeitspunktes parallel und steht daher, wie sie, auf dem centralen Aehnlichkeitsstrahl senkrecht; sie liegt in der Mitte zwischen diesen Polaren, und ist daher die senkrechte Halbirungslinie des Stücks des centralen Aehnlichkeitsstrahls der zwei Kreise, welches zwischen den Polaren liegt.

c) Die Polaren des Aehnlichkeitspunktes selbst sind zwei homologe Gerade der Potenzialität der zwei Kreise.

§. 82. Die zwei Potenzlinien zweier gegebenen Kreise, von welchen die eine zum innern und die andere zum äusseren Aehnlichkeitspunkt gehört, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung auf einander. Zwei Kreise haben also nur eine Potenzlinie, ob sie gleich zwei Aehnlichkeitspunkte haben. Und diese Potenzlinie hat daher noch folgende Eigenschaften:

a) Die vier Tangenten, die man von einem Punkt der Potenzlinie nach den zwei Kreisen ziehen kann, sind einander gleich, und die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte, welche nicht einem Kreis angehören, sind Strahlen des inneren und äusseren Aehnlichkeitspunktes. Wenn man also von einem Punkt der Potenzlinie aus einen Kreis beschreibt, welcher den einen der Kreise rechtwinklig schneidet, so schneidet er auch den andern Kreis rechtwinklig. Die Potenzlinie ist daher der geometrische Ort des Mittelpunkts der rechtwinkligen Schnittkreise der gegebenen zwei Kreise.

b) Zieht man von irgend einem Punkte der Potenzlinie zwei beliebige Sekanten nach den zwei gegebenen Kreisen, so sind die Produkte der zwei Abschnitte, welche zwischen der Potenzlinie und den Schnittpunkten der Kreislinie liegen, auf der Sekante des einen Kreises so gross, als auf der Sekante des andern Kreises. Die Produkte dieser Abschnitte heisst man auch Potenzen, so dass man auch sagen kann, die Potenzen eines Punktes der Potenzlinie sind für beide Kreise gleich. Umgekehrt: wenn die Potenzen eines Punktes in Betreff zweier Kreise einander gleich sind, so ist er ein Punkt ihrer Potenzlinie. Die Potenzlinie vereinigt daher alle Punkte der gleichen Potenzen zweier Kreise.

c) Die Entfernung der zwei Polaren der zwei Aehnlichkeitspunkte ist in dem einen Kreis so gross als in dem andern.

§. 83. Von besonderen Fällen, welche die Lage der Potenzlinie darbietet, sind zu bemerken:

a) Wenn sich zwei Kreise schneiden, so ist die Richtung ihrer gemeinschaftlichen Sehne ihre Potenzlinie, und wenn sich zwei Kreise berühren, so ist die Tangente ihres Berührungspunktes ihre Potenzlinie.

b) Zwischen einem Punkt und einem Kreis ist die Gerade, welche den Abstand des Punktes von seiner Polare im Kreise halbirt, die Potenzlinie. Liegt ein Punkt auf der Peripherie eines Kreises, so ist die Tangente dieses Punktes auch die Potenzlinie zwischen ihm und dem Kreis.

c) Die Potenzlinie zwischen zwei Punkten ist die senkrechte Halbirungslinie des Abstandes dieser zwei Punkte.

d) Die Potenzlinie zwischen einer Geraden und einem Kreis, sowie auch die Potenzlinie zwischen einem Punkt und einer Geraden, fällt mit der Geraden zusammen.

e) Die Potenzlinie zwischen zwei Geraden ist die Halbirungslinie

des Winkels, den sie mit einander machen. Weil aber zwei Gerade zwei verschiedene Winkel mit einander machen, so liefern sie auch zwei verschiedene Potenzlinien.

§. 84. Sind drei Kreise in einer Ebene gegeben, so convergiren ihre drei Potenzlinien in einem Punkt, welcher der gemeinschaftliche Potenzpunkt der drei Kreise heisst.

a) Wenn sich daher drei Kreise gegenseitig schneiden, so convergiren ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen in einem Punkt.

b) Wenn ein Kreis zwei andere Kreise berührt, so liegt der Convergenzpunkt der Tangenten ihrer Berührungspunkte auf der Potenzlinie der zwei Kreise, die sich nicht berühren; wenn sich drei Kreise gegenseitig berühren, so convergiren die drei Tangenten ihre Berührungspunkte in einem Punkt.

c) Die drei senkrechten Halbirungslinien der drei Seiten eines Dreiecks convergiren in einem Punkt, dem Potenzpunkt der drei Ecken.

d) Die drei Halbirungslinien der Umfangswinkel eines Dreiecks convergiren in einem Punkt, dem Potenzpunkt der Seiten des Dreiecks.

Bringt man die Aehnlichkeit zweier Kreise in Verbindung mit der involutorischen Collineation, so entdeckt man sogleich, dass zwei Kreise einer Ebene nicht nur ähnlich, sondern auch noch in einem andern Sinne perspektivisch collineär sind. Ist nämlich O der Aehnlichkeitspunkt, etwa der äussere, zweier gegebenen Kreise J und J', Fig. 52, und zieht man durch denselben beliebige Strahlen, welche den einen Kreis in den Punkten A und 𝔄, B und 𝔅, C und ℭ und den andern Kreis in den Punkten A' und 𝔄', B' und 𝔅', C' und ℭ' durchschneiden, so sind wegen der Aehnlichkeit der Kreise die Punkte A, B, C, 𝔄, 𝔅, ℭ des Kreises J den Punkten A', B', C', 𝔄', 𝔅', ℭ' des Kreises J', für das Centrum O und eine Axe im unendlichen Raum homolog. Es sind aber auch wegen der involutorischen Collineation der Kreise die Punkte A, B, C, 𝔄, 𝔅, ℭ, des Kreises J den Punkten 𝔄, 𝔅, ℭ, A, B, C desselben Kreises für denselben Punkt O als Centrum und der Polare 𝔞𝔠 als Axe collineär (§. 70). Hieraus folgt, dass auch die Punkte A', B', C', 𝔄', 𝔅', ℭ' des Kreises J' den Punkten 𝔄, 𝔅, ℭ, A, B, C des Kreises J für dasselbe Centrum O, aber für eine

andere Axe $\alpha\gamma$ collineär sind (§. 49, a). Und zwar erfährt man durch denselben Satz (§. 49), welcher diese Collineation begründet, dass die Polare $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ des Aehnlichkeitspunktes O im Kreis J die Potenzlinie $\alpha\gamma$ der zwei Kreise J und J′ und die unendlich entfernte Axe der Aehnlichkeit derselben zwei Kreise in einem Punkt convergiren. Weil aber somit die zwei ersten Linien in einem Punkt einer Geraden convergiren die im unendlichen Raum liegt, so convergiren sie überhaupt erst im Unendlichen und sind daher parallel. Die Potenzlinie zweier Kreise, welche der Polare ihres Aehnlichkeitspunktes parallel geht, steht also wie diese auf dem centralen Aehnlichkeitsstrahl senkrecht.

Betrachtet man aber diese Collineation noch näher, so entdeckt man noch manche beachtenswerthe Eigenschaften. Es sind auf jedem Aehnlichkeitsstrahl gerade diejenigen zwei Punkte A und $\mathfrak{A}'$, A′ und $\mathfrak{A}$ homolog, welche nicht auf parallelen Halbmessern liegen und die daher invers liegend heissen können. Die Tangenten dieser inversen Punkte convergiren auf Punkten α und α' der Potenzlinie (§. 62, d und 46, b). Weil aber A und A′ die homologen Punkte der Aehnlichkeit sind, so ist $A'\alpha' \parallel A\mathfrak{a}$; aus demselben Grund ist auch $\mathfrak{A}\alpha' \parallel \mathfrak{A}'\alpha$ (§. 53, b). Aus diesem Parallelismus folgt aber, dass

$$\triangle\ A'\mathfrak{A}\alpha' \backsim \triangle\ A\mathfrak{A}'\alpha \backsim \triangle\ A\mathfrak{A}\mathfrak{a}.$$

Nun ist aber $\triangle\ A\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ gleichschenklig, es sind also auch die Dreiecke $A'\mathfrak{A}\alpha'$ und $A\mathfrak{A}'\alpha$ gleichschenklig, die homologen Tangenten der Potenzialität $A\alpha$ und $\mathfrak{A}'\alpha$, oder auch $A'\alpha'$ und $\mathfrak{A}\alpha'$, machen also mit dem Aehnlichkeitsstrahl ihrer Berührungspunkte gleiche, einander zugekehrte Winkel, oder sie sind antiparallel. Während also die homologen Tangenten der Aehnlichkeit parallel sind, so sind die homologen Tangenten der Potenzialität antiparallel. Aber nicht nur die Tangenten, sondern auch die homologen Sekanten verhalten sich auf diese Weise. Zieht man z. B. durch die Punkte A und B eine Gerade, so wird sie der Geraden $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, welche die homologen Punkte verbindet, homolog sein und mit ihr auf einem Punkt δ der Potenzlinie convergiren. Da aber die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$,

$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ homologe Punkte der Aehnlichkeit sind, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, folglich ist $\angle \mathfrak{B} = \angle \mathfrak{B}'$

Als Peripheriewinkel in gleichen Bögen ist aber auch

$$\angle A = \angle \mathfrak{B},$$

folglich ist auch $\angle A = \angle \mathfrak{B}'$. Ebenso findet sich

$$\angle B = \angle \mathfrak{A}'.$$

Es machen also auch die homologen Sekanten AB und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ der Potenzialität mit den Aehnlichkeitsstrahlen $A\mathfrak{A}'$ und $B\mathfrak{B}'$ gleiche Winkel, doch haben die gleichen Winkel eine versetzte Lage, durch welche kein Parallelismus, sondern ein Antiparallelismus begründet wird.

Diese Eigenthümlichkeit der homologen Geraden der Potenzialität, eröffnet auch sogleich einen Aufschluss über die Lage der Potenzlinie selbst. Die Tangenten der vier Punkte A, A', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ (Fig. 52), sind nämlich dem Vorausgehenden gemäss paarweise parallel und bilden daher ein Parallelogramm $\alpha\,\mathfrak{a}\,\alpha'\,\mathfrak{a}'$, dessen Diagonalen sich in einem Punkt q halbiren. Die Punkte α und α' sind aber Punkte der Potenzlinie, die Diagonale $\alpha\alpha'$ des Parallelogramms fällt also in die Richtung dieser Linie. Die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sind homologe Punkte der Aehnlichkeit der Kreise J und J', denn es ist $\mathfrak{a}$ der Convergenzpunkt der Tangenten der Punkte A und $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{a}'$ ist der Convergenzpunkt der homologen Tangenten der Punkte A' und $\mathfrak{A}'$, folglich sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ selbst homologe Punkte der Aehnlichkeit (§. 42, e). Die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ liegen also auf einem Aehnlichkeitsstrahl $O\mathfrak{a}$ (§. 46, a); und weil $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'$ in q von der Potenzlinie halbirt wird, so sieht man überhaupt, dass das Stück des Aehnlichkeitsstrahls, welches zwischen den zwei Polaren des Aehnlichkeitspunktes liegt, von der Potenzlinie halbirt werden muss. Geht daher der Aehnlichkeitsstrahl $B\mathfrak{B}$ durch den Mittelpunkt der Kreise, so steht er senkrecht auf den Polaren und der Potenzlinie, und die Potenzlinie halbirt das Stück $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'$, welches zwischen den Polaren liegt.

Nachdem nun die Lage der Potenzlinie für ein Centrum O bekannt ist, so fragt es sich, wie die Potenzlinie des andern Aehnlichkeitspunktes O' beschaffen sei. Im Allgemeinen

ist klar und kann sogleich auf ganz gleichem Wege eingesehen werden, dass die Potenzlinie des zweiten Aehnlichkeitspunktes in allen ihren Eigenschaften mit der des ersten Aehnlichkeitspunktes übereinstimmen muss. Allein es zeigt sich bei einer Vergleichung noch mehr, nämlich, dass die zwei Potenzlinien der zwei Aehnlichkeitspunkte gar nicht von einander verschieden sind, sondern aufeinander fallen. Ist nämlich O der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise J und J' (Fig. 53), und sind A und A' zwei homologe Punkte ihrer Potenzialität, so convergiren die Tangenten dieser Punkte in einem Punkt α der Potenzlinie, und bilden mit dem Aehnlichkeitsstrahl der Berührungspunkte das gleichschenklige Dreieck $\alpha AA'$. Zieht man nun auch noch die Tangenten αB und $\alpha B'$ an die zwei Kreise und verbindet die Punkte A' und B durch eine Gerade, welche die zwei Kreise in den Punkten C und C' zum zweitenmal schneidet, so weiss man, dass $\alpha A = \alpha A'$ wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\alpha AA'$, und $\alpha A = \alpha B$, nach einem bekannten Satz der Kreislehre, folglich $\alpha A' = \alpha B$. Es folgt hieraus, dass auch das Dreieck $\alpha A'B$ gleichschenklig ist, und dass die Tangenten $\alpha A'$ und αB gegen die Sekante A'B antiparallel liegen.

Nun ist $\angle \alpha BJ$ und also auch $\angle \alpha BA' + \angle JBC = R$ folglich auch $\angle \alpha A'B + \angle J'A'B = \angle \alpha BA' + JBC$, und weil das Dreieck $\alpha A'B$ gleichschenklig und

$$\angle \alpha A'B = \angle \alpha BA', \text{ auch } \angle J'A'B = \angle JBC,$$

folglich auch $\angle J'A'B = \angle JCB$, also $JC \parallel J'A'$.

Die Punkte C und A' sind also homologe Punkte des inneren Aehnlichkeitspunkts (§. 77, b), A'C ist ein innerer Aehnlichkeitsstrahl, welcher die Centrale in dem innern Aehnlichkeitspunkt O' schneidet; die Punkte A' und B sind als inverse Punkte desselben zwei homologe Punkte der Potenzialität für den inneren Aehnlichkeitsstrahl, und die Tangenten der Punkte A' und B convergiren in einem Punkt α der Potenzlinie dieser Potenzialität. Man sieht hieraus, dass jeder Punkt α der Potenzlinie des äusseren Aehnlichkeitspunktes

zugleich auch ein Punkt der Potenzlinie des inneren Aehnlichkeitspunktes ist, und dass somit zwei Kreise für ihre zwei Aehnlichkeitspunkte doch nur eine einzige Potenzlinie haben.

Diese Betrachtung zeigt nun aber in Verdindung mit §. 62, dass, wenn man von einem Punkt α der Potenzlinie zweier Kreise Tangenten an die Kreise zieht, dieselben paarweise homolog sind, da im Punkt α der Axe sich zwei homologe Punkte decken, und die Tangenten homolog sind, welche man von homologen Punkten an collineäre Curven zieht, und dass die Verbindungslinien der Berührungspunkte, welche nicht zu demselben Kreis gehören, Strahlen des äussern und innern Aehnlichkeitspunktes O und O′ sind, dass endlich diese Tangenten mit diesen Strahlen gleichschenklige Dreiecke bilden, und daher alle vier einander gleich sind. Wenn man also aus einem beliebigen Punkte α der Potenzlinie zweier Kreise einen dritten Kreis zieht, der durch einen der Berührungspunkte A geht, so geht er auch durch die drei übrigen B, B′ und A′, und schneidet die zwei gegebenen Kreise zugleich senkrecht. Weil aber alle Punkte der Potenzlinie diese Eigenschaft haben, so kann man auch sagen, die Potenzlinie sei der geometrische Ort des Mittelpunkts der Kreise, welche die gegebenen Kreise rechtwinklig schneiden.

Man kann diese letztere Eigenschaft noch von einem etwas allgemeineren Standpunkte aus auffassen, und statt der Tangenten homologe Sekanten, αB und $\alpha B'$ (Figur 54) ziehen. Dieselben machen mit den Aehnlichkeitsstrahlen OA und OB gleiche, aber versetzte Winkel, so dass $\angle \alpha AA' = \angle \alpha B'B$, $\angle \alpha A'A = \angle \alpha BB'$, folglich ist $\triangle \alpha AA' \sim \triangle aBB'$, also

$$\alpha A : \alpha A' = \alpha B' : \alpha B \text{ und } \alpha A \,.\, \alpha B = \alpha A' \,.\, \alpha B'.$$

Die Potenzen (Produkte) des Punktes α in Betreff der zwei Kreise J und J′ sind also einander gleich, und weil dieselben Schlüsse sich für alle Punkte der Potenzlinie anwenden lassen, so folgt, dass die Potenzlinie alle Punkte der gleichen Potenzen mit einander verbindet. Dieser Satz begreift den vorausgehenden als einen besondern Fall in sich, sofern auf

der Tangente die Potenz in ein Quadrat übergeht. Man kann diesen Satz auch umkehren und zeigen, dass ein Punkt auf der Potenzlinie liegt, sobald seine Potenzen für beide Kreise einander gleich sind. Die Durchführung kann dem Leser überlassen werden.

Weil die Potenzlinie zweier Kreise nur eine einzige ist, und in der Mitte zwischen den Polaren eines Aehnlichkeitspunktes liegt, so folgt noch für die Lage der zwei Polaren der zwei Aehnlichkeitspunkte in den Kreisen, dass die zwei Polaren in dem einen Kreis so weit von einander abstehen, als in dem andern.

Nachdem nun die allgemeinen Eigenschaften der Potenzlinie ermittelt sind, so bleibt noch übrig, die wichtigsten besondern Fälle in's Auge zu fassen. Am leichtesten ist die Lage der Potenzlinie zweier Schnittkreise zu bestimmen, denn für solche Kreise folgt aus §. 64, b, dass die gemeinschaftliche Sehne derselben, mit der Richtung ihrer Potenzlinie zusammen fällt. Weil die Schnittkreise aber in Berührungskreise übergehen', sobald ihre Schnittpunkte unendlich nah aneinander rücken, so zeigt sich, dass die Potenzlinie zwischen zwei Berührungskreisen die Tangente ihres Berührungspunktes ist.

Andere beachtenswerthe Fälle ergeben sich dadurch, dass die zwei Kreise selbst, deren Potenzlinie gesucht ist, extreme Dimensionen annehmen.

Ist nun ein Kreis und ein Punkt gegeben, so weiss man, dass die zwei Aehnlichkeitspunkte mit diesem Punkte zusammenfallen (§. 78, c), und die Polare der Aehnlichkeitspunkte in diesem auf einen Punkt reducirten Kreis verwandelt sich in eine Gerade, welche durch diesen Punkt geht und auf der Centralen senkrecht steht. Die zwei Polaren im andern endlichen Kreis fallen auch aufeinander. Die Potenzlinie, welche in der Mitte zwischen den zwei Polaren eines Aehnlichkeitspunktes liegt, ist in diesem Fall also die senkrechte Halbirungslinie des Abschnittes der Centralen, der zwischen dem Punkt und seiner Polaren im endlichen Kreis liegt.

Ist einer der zwei Kreise in Form einer Geraden gegeben,

so bezeichnet der Durchmesser des endlichen Kreises, welcher auf der Geraden senkrecht steht, die zwei Aehnlichkeitspunkte (§. 78, d). Zieht man nun durch einen dieser Aehnlichkeitspunkte O (Fig. 55) einen Aehnlichkeitsstrahl, welcher die endliche und unendliche Kreislinie in den Punkten A und A' schneidet, so convergiren die Tangenten dieser Punkte in einem Punkt α der Potenzlinie. Weil aber die Tangente des Punktes A im unendlich grossen Kreis mit der Geraden zusammenfällt, welche einen endlichen Bogen desselben vorstellt, so wird der Punkt α auf der gegebenen Geraden selbst liegen. Die Potenzlinie fällt also in dem in Rede stehenden Fall mit der Geraden zusammen, welche den unendlich grossen Kreis vorstellt. Die Lage der Potenzlinie hängt also in dem besprochenen Fall nicht von der Grösse des endlichen Kreises ab, und wird daher auch noch dieselbe sein, wenn der endliche Kreis auf einen Punkt reduzirt ist.

Sind zwei Gerade gegeben, welche sich in einem Punkt schneiden, so zeigt der unter §. 83, a betrachtete Fall die Lage der Potenzlinie an. Die zwei Geraden sind nämlich als die endlichen Bögen zweier unendlich grossen, aber desswegen auch einander gleichen Schnittkreise zu betrachten. Nun findet man aber leicht, dass die Richtung der gemeinschaftlichen Sehne zweier gleichen Schnittkreise die zwei Kreislinien unter gleichen Winkeln schneidet; man wird also auch im vorliegenden Fall, wo die zwei Kreise durch die Unendlichkeit einander gleich sind, schliessen, dass die Potenzlinie, welche durch ihren Schnittpunkt geht, gleiche Winkel mit den zwei gegebenen Geraden macht, d. h. ihren Winkel halbirt.

Sind drei beliebige Kreise A, B und C (Fig. 56) in einer Ebene gegeben, und bezeichnet man die Potenzlinie zwischen A und B mit 𝔈, die Potenzlinie zwischen A und C mit 𝔅, die Potenzlinie zwischen B und C mit 𝔄, und schneiden sich die zwei Potenzlinien 𝔅 und 𝔈 in einem Punkt P, so sind sowohl die Potenzen des Punktes P in den Kreisen A und C, als auch die Potenzen des Punktes P in den Kreisen A und B einander gleich (§. 82, b). Es ist also der Punkt P auch ein

Potenzpunkt zwischen den Kreisen B und C und liegt folglich auf der Potenzlinie 𝔄 dieser Kreise. Es convergiren also die drei Potenzlinien in einem einzigen Punkt P. Bringt man diese Eigenschaft mit dem unmittelbar Vorausgehenden in Verbindung, so ergeben sich die unter §. 83 angeführten Fälle so unmittelbar, dass es hinreichend sein wird, sie angedeutet zu haben.

H. Kreisberührungen.

§. 85. Die Collineation der Kreise gibt eine vollkommene Einsicht in die Kreisberührung. Es sind hierbei hauptsächlich folgende Eigenschaften der Berührungskreise zu merken:

a) Die Potenzlinie zweier Kreise und die Polaren, welche einem ihrer Aehnlichkeitspunkte entsprechen, sind homologe Linien der ähnlichen Systeme, welche durch einen dieser Kreise und einen gemeinschaftlichen Berührungskreis derselben bestimmt werden.

b) Wenn zwei gegebene Kreise von mehreren anderen Kreisen auf dieselbe Art berührt werden, so ist die Potenzlinie der zwei gegebenen Kreise zugleich der gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahl der Berührungskreise.

c) Zu drei gegebenen Kreisen existiren acht gemeinschaftliche Berührungskreise. Dieselben lassen sich in vier Paare abtheilen, von welchen die Kreise jedes Paares eine Berührung gleicher Art vollziehen. Eines dieser Paare hat mit allen drei gegebenen Kreisen eine gleichartige Berührung; jedes andere Paar hat mit einem Paar der Kreise eine gleichartige und mit den übrigen Kreispaaren eine ungleichartige Berührung. Zu jedem Paar zusammengehöriger Berührungskreise gehört einer der vier Aehnlichkeitsstrahlen der drei gegebenen Kreise, nämlich derjenige, welcher durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der zwei Kreise geht, welche eine gleichartige Berührung erfahren, und durch die zwei inneren Aehnlichkeitspunkte der Kreise, welche ungleichartig berührt werden.

d) Zwei zusammengehörige Berührungskreise sind perspektivisch collineär, der zugehörige gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahl ist ihre Potenzlinie, der gemeinschaftliche Potenzpunkt der drei Kreise ist das Centrum ihrer Collineation, die Collineationsstrahlen, welche durch ihre Berührungspunkte gehen, gehen zugleich auch durch die Pole,

welche dem zugehörigen, gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl in den drei gegebenen Kreisen entsprechen.

e) Construirt man noch den gemeinschaftlichen rechtwinkligen Schnittkreis, so bezeichnet er in den gegebenen drei Kreisen solche Sehnen, welche mit den Tangenten der Berührungspunkte zweier zusammengehörigen Berührungskreise in denselben Punkten des zugehörigen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahls convergiren.

Berührt ein Kreis i zwei gegebene Kreise J und J′ (Figur 57) in den Punkten A und 𝔄′, so ist A𝔄′ ein Aehnlichkeitsstrahl der Kreise J und J′ und geht durch einen Aehnlichkeitspunkt O derselben (§. 80, a). Die Tangenten der Punkte A und 𝔄 convergiren in einem Punkte 𝔞 der Polare des Punktes O im Kreis J, die Tangenten der Punkte A′ und 𝔄′ convergiren in einem Punkte 𝔞′ der Polare des Punktes O im Kreise J′, die Tangenten der Punkte A und 𝔄′, so wie die der Punkte 𝔄 und A′ convergiren in den Punkten α und α' der Potenzlinie der Kreise J und J′ (§. 81, a). Es sind aber auch der Kreis J und der Berührungskreis i für den Punkt A als Centrum ähnlich (§. 78, a). In diesen ähnlichen Systemen sind die Punkte 𝔄 und 𝔄′, also auch die Tangenten 𝔄𝔞 und 𝔄′α und die Punkte 𝔞 und α, in welchen der in A berührende Aehnlichkeitsstrahl von den Tangenten geschnitten wird, und also endlich auch die Polare 𝔞𝔟 und die Potenzlinie $\alpha\alpha'$, als Parallele der homologen Punkte 𝔞 und α homolog. Aus demselben Grund sind auch $\alpha\alpha'$ und 𝔞′𝔟′ homologe Linien der für den Aehnlichkeitspunkt 𝔄′ ähnlichen Kreise J′ und i.

Sind zwei Kreise J und J′ mit der Potenzlinie $\alpha\beta$, Figur 58, gegeben, welche von zwei Kreisen i und i′ berührt werden, die zum Aehnlichkeitspunkt O gehören, und ist 𝔞′𝔟′ die Polare des Punktes O im Kreis J′, so ist nach dem Vorausgehenden jeder der Berührungskreise i und i′ dem Kreis J′ ähnlich und befindet sich mit demselben in perspektivischer Lage, es sind also auch die Berührungskreise selbst ähnlich und befinden sich in perspektivischer Lage; und namentlich ist die Gerade $\alpha\beta$ des Systems i homolog der Geraden 𝔞′𝔟′

des Systemes J′, und auch die Gerade $\alpha\beta$ des Systemes i′ homolog der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ des Systemes $\mathfrak{J}'$, folglich ist auch die Gerade $\alpha\beta$ des Systemes i homolog der Geraden $\alpha\beta$ des Systemes i′, d. h. es decken sich in der Richtung $\alpha\beta$ zwei homologe Gerade der Systeme i und i′. Es folgt hieraus, dass $\alpha\beta$ ein Aehnlichkeitsstrahl der Systeme i und i′ ist, da ausser den Aehnlichkeitsstrahlen nur noch die Axe, welche im unendlichen Raume liegt, die Eigenschaft hat, zwei homologe Richtungen zu vereinigen. Die Collineationsaxe zweier Kreise ist also ein gemeinschaftlicher Aehnlichkeitsstrahl aller Berührungskreise.

Zu zwei gegebenen Kreisen gibt es unendlich viele Berührungskreise, und zwar sowohl solche, welche eine gleichartige Berührung vollziehen und deren Berührungssehnen durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise gehen, als auch solche, welche eine ungleichartige Berührung vollziehen, und deren Berührungssehnen durch den innern Aehnlichkeitspunkt gehen (§. 80, a). Sind drei Kreise gegeben, so wird die Zahl der gemeinschaftlichen Berührungskreise beschränkt. Da die drei gegebenen Kreise A, B, C auf dreierlei Arten gepaart werden können A, B; A, C; B, C, und jeder Berührungskreis jedes Paar entweder gleichartig oder ungleichartig berühren muss, so gibt es offenbar vier Gattungen von Berührungskreisen. Eine Gattung wird A, B gleichartig, A, C und B, C ungleichartig; eine andere wird A, C gleichartig, A, B und B, C ungleichartig; wieder eine andere wird B, C gleichartig, A, C und A, B ungleichartig; eine letzte Gattung wird alle drei Paare gleichartig berühren. Jede dieser Gattungen schliesst nur ein Paar von Berührungskreisen in sich, weil die gleichartige Berührung entweder eine Berührung von aussen oder eine Berührung von innen sein kann; die ganze Zahl der Berührungskreise beläuft sich also auf acht. Mit den vier Paaren von Berührungskreisen stehen die vier gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahlen in genauem Zusammenhang, weil die Berührungssehne jeder gleichartigen Berührung im äussern Aehnlichkeitspunkt, die Berührungs-

sehne der ungleichartigen Berührung im innern Aehnlichkeitspunkt der berührten Kreise convergirt. Nach den Aehnlichkeitspunkten, in welchen die Berührungssehnen zusammenlaufen, gehört also zu jedem gemeinschaftlichen Berührungskreis derjenige gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahl, welcher durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der gleichartig berührten und durch die innern Aehnlichkeitspunkte der ungleich berührten Kreispaare geht. Man wird leicht sehen, dass jedes zu einer Gattung gehörende Paar der acht Berührungskreise zu einem und demselben Aehnlichkeitsstrahl der berührten Kreise gehört. Sind nun J und J′ zwei zusammengehörige Berührungskreise der Kreise A, B, C (Fig. 56), so dass die Berührungssehnen in den Punkten α, β und γ des zugehörigen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahls convergiren, so erscheinen auch umgekehrt die Kreise A, B und C als drei Berührungskreise der Kreise J und J′, es ist also der gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahl $\alpha\beta\gamma$ zugleich auch die Potenzlinie der zwei Kreise J und J′ (§. 85, b). Das Centrum P dieser Potenzialität und der Aehnlichkeit wird durch die Berührungssehnen tt, t′t′ und t″t″ bestimmt. Die Endtangenten dieser Berührungssehnen convergiren also in den Punkten α', β', γ' der Potenzlinie $\alpha\beta\gamma$. Sind nun A′, B′ und C′ die Pole, welche der Geraden $\alpha\beta\gamma$ in den Kreisen A, B, C entsprechen, so müssen auch die Berührungssehnen tt, t′t′ und t″t″ als die Polaren der Punkte α', β', γ' beziehungsweise durch diese Pole gehen (§. 74, b.)

Um aber das Centrum P der perspektivischen Kreise J und J′ noch näher kennen zu lernen, bemerke man, dass der Kreis J auch mit dem Kreis A für den Berührungspunkt t als Aehnlichkeitspunkt perspektivisch liegt (§. 78, a); und dass die Potenzlinie 𝔅 zwischen den Kreisen A und C und die Polare bb des Aehnlichkeitspunktes β homologe Linien der Kreise J und A sind (§. 85, a), und dass aus demselben Grunde auch die Potenzlinie ℭ und die Polare cc homologe Linien derselben Kreise J und A sind. Daraus folgt nach §. 42, e, dass auch die Punkte P und A′ homologe Punkte der ähnli-

chen Kreise P und A sind, und dass also die Verbindungslinie PA′ durch den Aehnlichkeitspunkt t derselben geht. Es sind aber nach Obigem die drei Punkte t, A′ und t in einer Richtung. Es geht also die Berührungssehne tt durch den Potenzpunkt P. Dasselbe gilt auch von allen anderen Berührungssehnen. Es convergiren also die Berührungssehnen tt, t′t′, t″t″ in dem Potenzpunkt P der drei gegebenen Kreise. Das Centrum P der zwei zusammen gehörigen Berührungskreise fällt also mit dem gemeinschaftlichen Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise zusammen, und die Punkte J, P und J′ liegen in einer auf $\alpha\beta\gamma$ senkrechten Richtung (§. 81, b).

Zieht man endlich aus dem Punkt P noch den gemeinschaftlichen rechtwinkligen Schnittkreis, welcher die gegebenen Kreise in den Punkten M, N; M′, N′; M″, N″ schneidet, so sind die Geraden PM und PN Tangenten, welche den Kreis A in den Punkten M und N berühren (§. 82, a). Es ist also MN die Polare, welche dem Punkt P im Kreis A entspricht (§. 71, c), folglich sind MN und tt conjugirte Sehnen des Kreises A, und MN geht durch den Pol α' der Sehne tt (§. 74, a), und convergirt also mit den Tangenten der Punkte t und t in demselben Punkt α' des zugehörigen Aehnlichkeitsstrahles $\alpha\beta\gamma$. Dasselbe findet bei den Sehnen M′N′, M″N″ Statt.

Sechstes Buch.

Entwicklung der Kegelschnitte.

A. Begriffliche Entwicklung der Kegelschnitte.

§. 86. Jede Linie, welche einem Kreis collineär ist, hat selbst die Gestalt einer Curve zweiter Ordnung, und heisst Kegelschnitt.

Da alle Kreislinien auch unter einander collineär sind, so ist jeder Kegelschnitt jedem Kreis collineär, und alle Kegelschnitte sind auch unter einander collineär.

Unter den Kreisen, welche in der Ebene eines Kegelschnitts liegen, gibt es immer auch solche, welche mit demselben perspektivisch liegen. Ein solcher Fall mag nun zunächst in diesem Buch behandelt werden, weil er die einfachste Construction der Kegelschnitte und gerade dasjenige darbietet, was zu den bekanntesten Eigenschaften der Kegelschnitte gerechnet wird.

§. 87. **Der geometrische Ort des Mittelpunkts eines Kreises, welcher zwei andere gegebene Kreise gleichartig berührt, so wie auch eines Kreises, welcher die zwei gegebenen Kreise ungleichartig berührt, ist ein Kegelschnitt, welcher mit jedem seiner Kreise collineär und mit ihnen in perspektivischer Lage ist. Die zwei gegebenen Kreise heissen Leitkreise, ihre Mittelpunkte Brennpunkte, der Berührungskreis heisst der Erzeugungskreis des Kegelschnitts.**

Der Mittelpunkt eines Leitkreises ist zugleich auch das Collineationscentrum für diesen Leitkreis in dem Kegelschnitt. Die Potenzlinie der zwei Leitkreise ist die Collineationsaxe zwischen dem Kegelschnitt und seinem Leitkreise. Diese Collineationsaxe steht also auf dem centralen Aehnlichkeitsstrahl der zwei Leitkreise senkrecht.

Die Leitkreise des Kegelschnitts können auch durch Punkte oder durch gerade Linien ersetzt werden, indem einer oder beide derselben auf einen Punkt reducirt sind oder indem ein endlicher Bogen derselben in Form einer geraden Linie erscheint, wenn sein Halbmesser unendlich gross ist. Wenn diese extremen Formen der Leitkreise unterschieden werden, so ergeben sich folgende Elemente für die Entwicklung der Kegelschnitte aus Leitkreisen:

a) zwei endliche Kreise,

b) ein endlicher Kreis und ein Punkt,

c) ein endlicher Kreis und eine Gerade,

d) eine Gerade und ein Punkt,

e) zwei Punkte,

f) zwei Geraden.

Wenn ein Leitkreis in Form eines Punktes erscheint, so verwandelt sich das Berühren des Erzeugungskreises in ein Gehen durch den Punkt.

§. 88. Mehrere Linien und Punkte des Kegelschnitts haben nach ihrer Beziehung zu den Brennpunkten besondere Namen erhalten:

a) Diejenige Sehne des Kegelschnitts, welche durch die zwei Brennpunkte desselben geht, heisst Axe. Die zwei Endpunkte der Axe heissen Scheitel. Die Abschnitte der Axe zwischen dem Brennpunkt und dem benachbarten Scheitel heissen Brennweiten. Das Verhältniss der Entfernung der zwei Brennpunkte zur Axe heisst Excentricität. Der Punkt der Axe, welcher in der Mitte zwischen den zwei Brennpunkten liegt, heisst Mittelpunkt.

b) Jede Sehne eines Kegelschnitts, welche durch einen Brennpunkt geht, heisst Parameter. Der Parameter, welcher senkrecht auf der Axe steht, heisst Hauptparameter; jeder andere Parameter, der schief zur Axe steht, heisst Nebenparameter. Dasjenige Stück eines Parameters, das zwischen dem Brennpunkt und der Kegelschnittlinie liegt, heisst Brennstrahl. Redet man von den Brennstrahlen eines Punktes der Kegelschnittlinie, so versteht man darunter die zwei Strecken, die zwischen demselben und den zwei Brennpunkten liegen.

c) Jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht, heisst Durchmesser. Derjenige Durchmesser, welcher auf der Axe senkrecht steht, heisst die zweite Axe.

d) Im Uebrigen heisst jede Gerade, welche mit dem Kegelschnitt

nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, Tangente, und die Gerade, welche in dem Berührungspunkt auf der Tangente senkrecht steht, Normale. Zieht man zugleich vom Berührungspunkt aus eine Senkrechte auf die Axe, so heisst das Stück der Axe, welches zwischen der Senkrechten und der Tangente liegt, Subtangente, und dasjenige Stück, welches zwischen der Senkrechten und der Normalen liegt, Subnormale.

§. 89. In Betreff der Collineation des Kegelschnitts mit seinen Leitkreisen ist noch Folgendes zu bemerken:

a) Je zwei antiparallele Tangenten der Leitkreise bilden einen Winkel, der von ihrer homologen Tangente des Kegelschnitts halbirt wird, und umgekehrt: die Halbirungslinie des Winkels zweier antiparallelen Tangenten der Leitkreise ist eine Tangente des Kegelschnitts, welche den antiparallelen Tangenten der Leitkreise homolog ist.

b) Die Tangente des Kegelschnitts halbirt den Winkel, welchen die Brennstrahlen des Berührungspunktes mit einander machen, und umgekehrt: diejenige Halbirungslinie des Winkels zweier Brennstrahlen eines Punktes des Kegelschnitts, welche ausserhalb des Kegelschnitts liegt, ist eine Tangente des Kegelschnitts.

c) Ein Aehnlichkeitsstrahl der Leitkreise und die Tangente des Kegelschnitts, welche den antiparallelen Tangenten der Leitkreise jenes Strahls homolog sind, stehen senkrecht auf einander, und umgekehrt: die senkrechte Halbirunglinie des Stückes eines Aehnlichkeitsstrahls, welches zwischen zwei inversen Punkten liegt, ist eine Tangente des Kegelschnitts.

d) Jeder Durchmesser des Kegelschnitts ist einem Aehnlichkeitsstrahl der Leitkreise homolog, und umgekehrt: jeder Aehnlichkeitsstrahl der Leitkreise ist einem Durchmesser des Kegelschnitts homolog. Der Mittelpunkt des Kegelschnitts und der Aehnlichkeitspunkt der Leitkreise sind homologe Punkte dieser Curven.

e) Die zweite Axe des Kegelschnitts ist demjenigen Aehnlichkeitsstrahl der Leitkreise homolog, welcher auf der Hauptaxe senkrecht steht; er ist also mit ihm und mit der Collineationsaxe parallel.

f) Die Polare, welche dem Aehnlichkeitspunkte in einem der Leitkreise entspricht, ist in dem System dieses Leitkreises die Gegenaxe bei seiner Collineation mit dem Kegelschnitt.

Der Kreis gehört zu einer Klasse von Curven, welche wegen ihrer Ableitung aus der Kegelfläche den Namen Ke-

gelschnitte tragen. Obgleich aber die Entwicklung dieser Curven durch Schnitte der Kegelfläche längst bekannt ist, so ist es doch ein Verdienst der neueren Geometrie, dieser Entwicklung durch Aufsuchung der allgemeinen Eigenschaften, welche den projektivischen Figuren überhaupt zukommen, ihre wahre Grundlage geschaffen zu haben.

Die Collineation fasst die Eigenschaften der projektivischen Figuren unabhängig von ihrer Lage im Raume auf, und bietet dadurch nicht nur den Vortheil, die Gesetze leichter zu entdecken, sondern auch diess ganz auf planimetrischem Wege thun zu können. Versteht man unter Kegelschnitt jede dem Kreis collineäre Curve, so stimmt diese Definition wesentlich mit dem Begriff des Kegelschnitts, welchen der Wortlaut gibt, überein und gestattet zugleich der Methode der neueren Geometrie den Zugang; allein es ist diess durchaus nicht der einzige Weg, welchen diese Methode an die Hand gibt, im Gegentheil, es ist ihr gelungen, die Kegelschnitte auf eine so allgemeine Weise aufzufassen, welche nicht einmal die Gestalt des Kreises als bekannt voraussetzt. *) Allein im pädagogischen Interesse wird es immer gerathener sein, das Neue, das zu entwickeln ist, an das Alte, schon Bekannte anzureihen, und so allmälig vom Bekannten stufenweise zum Unbekannten fortschreitend, das Gebäude der Erkenntniss aufzubauen. So wurde auch hier der Begriff der Kegelschnitte auf die Collineation des Kreises zurückgeführt, und die folgenden Abschnitte werden zeigen, wie reichhaltig dieser Begriff und wie geeignet er ist, um eine vollständige Kenntniss der Kegelschnitte zu bieten. Um aber den pädagogischen Anforderungen vollkommen Genüge zu leisten, mag vorher noch ein besonderer Fall der Collineation des Kegelschnitts mit dem Kreis behandelt werden, welcher die unentbehrlichsten Eigenschaften der Kegelschnitte kennen lehrt.

---

*) Professor v. Staudt definirt den Kegelschnitt als die Ordnungslinie zweier Polarsysteme. Schon die conformen und projektivischen Vielstrahlen können zu einem Begriff des Kegelschnitts führen.

Weil nämlich zwei Figuren, welche mit einer dritten collineär sind, es auch unter sich sind (§. 49), so folgt aus obigem Begriff des Kegelschnitts, dass jeder Kegelschnitt jedem Kreis und also auch jedem andern Kegelschnitt collineär ist. Nicht aber befinden sich zwei solche collineäre Curven einer Ebene immer in perspektivischer Lage, im Gegentheil wird dieses nur in gewissen Fällen der Fall sein. Es führen übrigens die Kreisberührungen auf einen solchen Fall, welcher eben dadurch die bequemsten Mittel zur Construction der Kegelschnitte liefert. Dieser besondere Fall wird daher den Gegenstand dieses sechsten Buches ausmachen.

Aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Kreise ist bekannt (§. 80, a), dass, wenn ein Kreis C (Fig. 59) zwei andere Kreise F′ und F″, ungleichartig berührt, die Berührungssehne C′C″ desselben durch den innern Aehnlichkeitspunkt O′ der Kreise geht. Die Berührungssehnen aller Berührungskreise der ungleichartigen Berührung convergiren also in diesem innern Aehnlichkeitspunkt O′. Ebenso convergiren die Berührungssehnen aller Berührungskreise der gleichartigen Berührung in einem Punkt, dem äussern Aehnlichkeitspunkt der Leitkreise. Diese Bemerkung gibt ein leichtes Mittel, um sogleich den Mittelpunkt eines Berührungskreises zu finden. Für die ungleichartige Berührung hat man z. B. nur einen innern Aehnlichkeitsstrahl zu ziehen, der den Kreis F′ in den Punkten C′ und 𝔈′, und den Kreis F″ in den Punkten C″ und 𝔈″ schneidet, so werden die nach den inversen Schnittpunkten C′ und C″ gezogenen Halbmesser der Kreise F′ und F″ immer in dem Mittelpunkt C eines Berührungskreises convergiren. Ebenso convergiren die Halbmesser F′𝔈′ und F″𝔈″ in einem zweiten solchen Punkte 𝔈. Um diess einzusehen, darf man nur bemerken, dass, weil C′ und 𝔈″ homologe Punkte der ähnlichen Kreise sind, auch F′C′ ∥ F″𝔈″ ist (§. 77, b), und weil C″ und 𝔈′ homolog sind, auch F″C″ ∥ F′𝔈′ ist. Es ist also △ CC′C″ ∽ △ C″𝔈″F″ ∽ △ F′C′𝔈′ ∽ △ 𝔈𝔈′𝔈″. Es sind also die Dreiecke CC′C″ und 𝔈𝔈′𝔈″ ebenso wie die Dreiecke C″𝔈″F″ und F′C′𝔈′ gleichschenklig, und ein aus

C mit CC' beschriebener Kreis geht durch C'' und berührt, wie man leicht sieht, den Kreis F'' in dem Punkt C'' und den Kreis F' in dem Punkt C'. Ebenso berührt auch ein aus 𝔈 mit 𝔈𝔈' beschriebener Kreis die Kreise F' und F'' in den Punkten 𝔈' und 𝔈''. So oft man also die Halbmesser an die inversen Schnittpunkte eines Aehnlichkeitsstrahls zieht, so convergiren sie stets in den Mittelpunkten zweier Berührungskreise. Diese Construction führt aber noch weiter, indem die homologen Halbmesser wegen ihres Parallelismus ein Parallelogramm F'CF''𝔈 mit einander bilden, dessen Diagonalen sich in einem Punkte O halbiren; denn hieraus folgt, dass jeder Aehnlichkeitsstrahl gerade zu solchen zwei Berührungskreisen führt, deren Centrale C𝔈 durch die Mitte O der Entfernung F'F'' geht. Es werden also die Centralen aller solcher Paare von Berührungskreisen, welche zu einem Aehnlichkeitsstrahl gehören, in einem und demselben Punkte, dem Mittelpunkte der Geraden F'F'', convergiren.

Diess sind die aus der Aehnlichkeit der Leitkreise sich ergebenden Consequenzen, welche aber erst ihre Vollendung gewinnen, wenn man auch die Potenzialität der Leitkreise mit in Erwägung zieht. Vermöge der letzteren weiss man aber, dass die Potenzlinie der Berührungskreise zugleich auch die Aehnlichkeitsaxe der Berührungskreise ist (§. 85, b), die Centrale C𝔈 der zum Aehnlichkeitsstrahl C'𝔈' gehörenden Erzeugungskreise convergirt also mit dem letzteren in einem Punkt γ' der Potenzlinie. Auf gleiche Weise muss jeder Aehnlichkeitsstrahl mit der Centralen der Berührungskreise in einem Punkte der Potenzlinie convergiren. Man schliesst hieraus, dass die Aehnlichkeitsstrahlen alle, und die Centralen ihrer Berührungskreise zwei Vielstrahlen O' und O bilden, die paarweise in Punkten der Potenzlinie convergiren, und welche also conform sind und gegen die Potenzlinie sich in perspektivischer Lage befinden (§. 33). Weil nun aber die Punkte C und C', 𝔈 und 𝔈' auf Geraden liegen, die in dem Mittelpunkt F' des Leitkreises convergiren, so sind sie perspektivisch liegende Punkte der Vielstrahlen O und O' für das Centrum F' und

für die Axe $\alpha\gamma'$ (§. 46). Und weil dieselben Schlüsse auf alle homologen Strahlen der Vielstrahlen O und O' und die zu ihnen gehörigen Mittelpunkte der Erzeugungskreise anwendbar sind, so folgt, dass überhaupt der Leitkreis collineär ist und perspektivisch liegt mit der Curve, welche der Mittelpunkt des Erzeugungskreises beschreibt, wenn derselbe stetig berührend sich fortbewegt, oder dass der geometrische Ort des Berührungskreises ein Kegelschnitt ist. Ebenso wird man sehen, dass auch der andere Leitkreis F'' dem Kegelschnitt für den Punkt F'' als Centrum und dieselbe Potenzlinie $\alpha\gamma'$ als Axe in perspektivischer Lage collineär ist.

Weil die Berührungspunkte C' und C'' (Fig. 59, a, b, c) eines jeden Berührungskreises zugleich homologe Punkte der Potenzialität der Leitkreise sind, so convergiren die antiparallelen Tangenten dieser Punkte auf einem Punkt γ der Potenzlinie; weil aber bei der Collineation des Leitkreises mit dem Kegelschnitt diese Punkte C' und C'' zugleich auch dem Punkt C des Kegelschnitts homolog sind, so wird auch die Tangente, welche man in C an den Kegelschnitt zieht, den antiparallelen Tangenten der Leitkreise homolog sein und mit ihnen in demselben Punkt γ der Potenzlinie $\alpha\gamma$ convergiren (§. 62). Nun sind aber die antiparallelen Tangenten $C'\gamma$ und $C''\gamma$ des Kreises C einander gleich, auch ist $CC' = CC''$ als Halbmesser des Berührungskreises, mithin ist $CC'C''\gamma$ ein Deltoid, *) in welchem die Diagonale $C\gamma$ die Winkel bei C und γ halbirt und in welchem $C\gamma \perp C'C''$. Es folgt daraus, dass sowohl die Gerade, welche den Winkel der antiparallelen Tangente der Leitkreise halbirt, als auch diejenige Gerade, welche den Winkel, den die zwei Brennstrahlen F' C und F'' C mit einander machen, als auch die Gerade, welche das Stück C' C'' eines Aehnlichkeitsstrahls, das zwischen zwei inversen Punk-

*) Das Deltoid, ein Viereck, welches aus zwei Paaren gleicher Seiten gebildet wird, die aber nicht einander gegenüberstehen wie im Parallelogramm, sondern an zwei gegenüberstehenden Ecken aneinander liegen, ist durch die Krystallographie eingeführt worden und verdient auch in der Geometrie Bürgerrecht.

ten ihrer Leitkreise liegt, senkrecht halbirt, eine Tangente des Kegelschnitts ist. Und aus dem Gesetz der gleichen Aufeinanderfolge, welches die Collineation beobachtet (§. 47, a), muss die Tangente des Kegelschnitts ausserhalb der Fläche des Kegelschnitts liegen, wie auch die Tangente des Kreises ausserhalb des letztern liegt. Weil die Collineationsaxe des Kegelschnitts und seines Leitkreises mit der Potenzlinie der Leitkreise zusammenfällt, so folgt, dass sie auf dem centralen Aehnlichkeitsstrahl, der hier zugleich die Axe des Kegelschnitts ist, senkrecht steht (§. 81, b).

Weil der Aehnlichkeitspunkt O′ des Leitkreises und der Mittelpunkt O des Kegelschnitts die Scheitel derjenigen homologen Vielstrahlen sind, auf welchen die homologen Punkte des Kegelschnitts liegen, so folgt, dass diese Punkte O und O′ selbst zwei homologe Punkte sind (§. 42, e).

Weil der Aehnlichkeitsstrahl C′𝔆′ und der Durchmesser des Kegelschnitts C𝔆, welcher die Mittelpunkte der Berührungskreise des Aehnlichkeitsstrahls mit einander verbindet, homologe Strahlen der Vielstrahlen O′ und O sind, so folgt, dass die Aehnlichkeitsstrahlen der zwei Leitkreise mit den Durchmessern des Kegelschnitts homolog sind.

Unter diesen Aehnlichkeitsstrahlen verdient derjenige (B′𝔅′) eine besondere Aufmerksamkeit, welcher auf der Axe F′F″ senkrecht steht. Dieser ist, weil auch die Collineationsaxe $\alpha\gamma$ auf derselben Axe senkrecht steht, mit der Collineationsaxe parallel; der collineäre Durchmesser B𝔅 des Kegelschnitts, der mit der erstgenannten Linie B′𝔅′ in einem unendlich entfernten Punkte convergirt, ist also diesen Linien selbst parallel und steht daher ebenfalls senkrecht auf der Axe des Kegelschnitts. Dieser Durchmesser trägt wegen dieser ausgezeichneten Eigenschaft den Namen der zweiten Axe.

Die Tangenten der Punkte C′𝔆′ des Aehnlichkeitsstrahls sind den Tangenten der Punkte C, 𝔆 des Kegelschnitts homolog, also ist auch der Convergenzpunkt c′ des ersteren Tangentenpaares dem Convergenzpunkt des letzteren Tangentenpaares homolog. Da aber die Tangenten der Punkte C und

𝔊 senkrecht auf dem Aehnlichkeitsstrahl C′𝔊′ stehen (§. 89, c), so sind sie parallel und ihr Convergenzpunkt liegt im unendlichen Raum. Die Endestangenten aller Strahlen des Aehnlichkeitspunktes O′ im Leitkreis F′ convergiren aber in Punkten der Polare 𝔞′𝔠′ des Punktes O′ (§. 71, c). Die Endestangenten der Durchmesser, welche bezüglich den Aehnlichkeitsstrahlen homolog sind, convergiren nach dem Vorausgehenden im unendlichen Raum. Es folgt hieraus, dass die Polare 𝔞′𝔠′ einer Geraden des unendlichen Raumes homolog sei, oder dass die Polare 𝔞′𝔠′ diejenige Gegenaxe bei der Collineation des Kegelschnitts mit seinem Leitkreise ist, welche in dem Sytem des Leitkreises F′ liegt.

B. Lineare Construktion der Kegelschnitte.

§. 90. Sind die zwei Leitkreise eines Kegelschnitts gegeben, und zieht man an die inversen Schnittpunkte eines zugehörigen Aehnlichkeitsstrahls die Halbmesser der Leitkreise, so convergiren dieselben in einem Punkte der Peripherie des Kegelschnitts.

Für den Fall, dass eine Gerade einen Leitkreis ersetzt, ist zu bemerken, dass jede andere Gerade, welche auf jener senkrecht steht, die Stelle eines Halbmessers im unendlich grossen Leitkreise vertritt.

§. 91. Sind die zwei Leitkreise eines Kegelschnitts gegeben, und zieht man einen zugehörigen Aehnlichkeitsstrahl, so convergirt die senkrechte Halbirungslinie des zwischen zwei inversen Punkten liegenden Stückes mit jedem Halbmesser der inversen Punkte selbst in einem Punkt der Curve des Kegelschnitts. Die Scheitel des Kegelschnitts liegen in der Mitte zwischen den inversen Punkten der Axenrichtung.

Wenn ein Leitkreis durch einen Punkt vertreten ist, so ist jede Gerade, welche durch diesen Punkt geht, ein Aehnlichkeitsstrahl, der zum Kegelschnitt gehört; das Stück desselben, welches zwischen dem Punkt und der Peripherie des anderen eigentlichen Leitkreises liegt, ist eben das Stück, welches durch eine Senkrechte halbirt werden muss. Die Halbirung dieser von dem gegebenen Punkt nach der Peripherie des Leitkreises gezogenen Linien kann durch folgende Eigenschaft der Kreislinie abgekürzt werden:

Die Halbirungspunkte aller Geraden, die zwischen einem Punkt

und einer Kreislinie liegen, liegen selbst wieder auf einer Kreislinie, welche die Axe des Kegelschnitts zu ihrem Durchmesser hat, der aus dem Punkt und dem Kreise entwickelt wird.

§. 92. Sind die zwei Leitkreise eines Kegelschnitts gegeben, und zieht man an die inversen Schnittpunkte eines zugehörigen Aehnlichkeitsstrahls die Halbmesser eines Leitkreises, so bezeichnen sie auf demjenigen Durchmesser des Kegelschnitts, welcher mit dem Aehnlichkeitsstrahl in einem Punkt der Potenzlinie der Leitkreise convergirt, zwei Punkte der Kegelschnitt-Curve.

Noch ist zu bemerken, dass dieselbe Methode auch Anwendung findet, wenn statt des Aehnlichkeitspunktes der Leitkreise und des Mittelpunktes des Kegelschnitts zwei andere homologe Punkte des Kegelschnitts und seines Leitkreises gegeben sind.

§. 93. Sind die zwei Leitkreise, ihre Potenzlinie und die Polare des Aehnlichkeitspunktes in einem Leitkreis gegeben, so findet man die Punkte des zugehörigen Kegelschnitts, welche auf einer gegebenen Geraden liegen, wenn man durch den Punkt, in welchem sie die Potenzlinie schneidet, und durch den Punkt, in welchem die Polare von der Richtung eines parallelen Halbmessers jenes Leitkreises getroffen wird, eine Hilfslinie legt. Die Halbmesser dieses Leitkreises, welche an die Schnittpunkte der Hilfslinie gezogen werden, bezeichnen auf der gegebenen Geraden die gesuchten Punkte des Kegelschnitts.

Die Construktion der Kegelschnitte hängt ganz davon ab, wie man die Kegelschnitte entwickelt. Wir werden aber derjenigen Entwicklung den Vorzug einräumen müssen, welche zur einfachsten Construktion nicht nur, sondern auch dazu führt, die Mannigfaltigkeit der Construktionen in ihrem inneren Zusammenhang in's Licht zu stellen. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, wird die Entwicklung der Kegelschnitte welche im vorausgehenden Abschnitt gegeben wurde, alle bisher gebräuchlichen weit übertreffen; denn sie bietet nicht nur alle bisherigen Construktionen auch dar, sondern sie gewährt noch manche neue, die nicht nur durch ihre Einfachheit, sondern auch dadurch ausgezeichnet sind, dass sie die Lücken ausfüllen, welche die bisher gebräuchlichen übrig liessen; auch zeigt sie, wie alle Arten von Kegelschnitten durch eine

und dieselbe Regel construirt werden können, und macht dadurch die Construktionsmethode von der besonderen Gestalt des Kegelschnitts unabhängig. Die Zahl der Construktionsmethoden, welche bei dieser Entwicklung an die Hand gegeben wird, ist aber so gross, dass es nöthig scheint, dieselben abtheilungsweise aufzuführen. Es sollen daher hier nur die Construktionsmethoden betrachtet werden, welche zwei feste, unveränderliche Leitkreise voraussetzen, im folgenden Abschnitt sollen die Methoden angegeben werden, welche auf der Veränderung der Leitkreise beruhen, und nachher in einem dritten Abschnitt diejenigen, welche sich aus der Beschränkung dieser Veränderung auf einen besonderen Fall ergeben.

Man hat im vorausgehenden Abschnitt schon Gelegenheit gehabt, zu sehen, dass, wenn man einen Aehnlichkeitsstrahl C′𝔖′ zweier Leitkreise F′ und F″ (Fig. 59) und an die inversen Schnittpunkte desselben die Halbmesser F′C′ und F″C″ zieht, dieselben immer in dem Mittelpunkt C eines gemeinschaftlichen Berührungskreises, also in einem Punkt C des zu dem Aehnlichkeitspunkt O′ gehörigen Kegelschnitts convergiren. Diese Eigenschaft gibt aber eine äusserst einfache Regel zur Construktion des Kegelschnitts selbst an. Ist nämlich der Aehnlichkeitspunkt O′ der Leitkreise bestimmt, dessen Kegelschnitt gezeichnet werden soll, so hat man nur beliebige Gerade durch denselben und sodann die Halbmesser nach den inversen Schnittpunkten zu ziehen, so bestimmen die Convergenzpunkte dieser Halbmesser eben so viele Punkte auf dem Umfang des gesuchten Kegelschnitts. Diese Construktion ist namentlich dadurch von Interesse, dass sie, sobald der Aehnlichkeitspunkt O′ gefunden ist, nur noch das Ziehen von drei geraden Linien voraussetzt, um einen Punkt des Kegelschnitts zu haben; und sie kann daher in diesem Sinne eine lineäre Construktion des Kegelschnitts genannt werden. Diese Methode ist nur anwendbar, wenn die Leitkreise ausgedehnte Linien sind und nicht durch Reducirung ihres Halbmessers auf die Grösse Null in Form von Punkten erscheinen. Die Methode ist aber noch ganz wohl anwendbar, wenn einer der

Leitkreise in Form einer Geraden gegeben ist, denn nichts hindert hier, den Aehnlichkeitspunkt zu finden (§. 78, d). Jeder Aehnlichkeitsstrahl führt auch in diesem Falle zu zwei inversen Punkten C' und C'' (Fig. 59, c), von denen der eine auf dem endlichen Leitkreis und der andere auf der Geraden liegt. Der Halbmesser $C''\mathfrak{S}'' \perp A''C''$ des unendlich grossen Kreises und der Halbmesser $F'C'$ des endlichen Kreises bebestimmen den Punkt C der Kegelschnittcurve.

Wenn nun aber diese Methode ihre Anwendbarkeit verliert, sobald ein Leitkreis auf einen Punkt reducirt ist, so bietet die Eigenschaft (§. 89, c) eine zweite allgemein anwendbare Methode der Construktion dar. Weil nämlich nach obigem Satz die senkrechte Halbirungslinie des zwischen zwei inversen Punkten liegenden Stückes $C'C''$ (Fig. 59) eines Aehnlichkeitsstrahls ebenfalls mit den Halbmessern $F'C'$ und $F''C''$ der inversen Punkte C' und C'' der Leitkreise in einem Punkt C des Kegelschnitts convergirt, so kann auch diese senkrechte Halbirungslinie statt des Halbmessers eines Leitkreises zur Bestimmung des Punktes C des Kegelschnitts benutzt werden. Diese Construktion ist zwar nicht mehr rein lineär, weil sie die Construktion einer Senkrechten voraussetzt, aber sie hat den Vortheil, auch in dem Fall noch anwendbar zu sein, wenn einer der Leitkreise in Form eines Punktes gegeben ist. Dieser letztere Fall gewährt aber wieder andere Vortheile, denn einmal fällt der Punkt F'', welcher den unendlich kleinen Leitkreis darstellt (Fig. 60), mit dem Aehnlichkeitspunkt der zwei Leitkreise selbst zusammen (§. 78, c), und es bedarf daher keiner Construktion zur Auffindung des Aehnlichkeitspunktes, dann aber ist jede Gerade wie $F''C'$, welche man vom Punkt F'' aus nach der Peripherie des anderen Leitkreises zieht, dasjenige Stück des Aehnlichkeitsstrahls, welches zwischen den inversen Punkten F'' und C' liegt. Man hat also nur von dem gegebenen Punkt F'' aus Gerade nach der Peripherie des Leitkreises F' zu ziehen und dieselben durch Senkrechte zu halbiren, so convergirt jede Halbirungslinie mit dem entsprechenden Halbmesser $F'C'$ in dem verlangten Punkt C des Kegelschnitts.

Es ist noch zu bemerken, dass die Halbirungspunkte, wie D, aller Aehnlichkeitsstrahlen auf der Peripherie eines Kreises liegen. Dann zieht man F′C′ und vom Halbirungspunkt D der Geraden F″C′ nach dem Mittelpunkt O des Kegelschnitts die Gerade OD, so ist, weil auch O in der Mitte von F′F″ liegt, OD ∥ F′C′, also $OD = \frac{1}{2} F'C'$. Weil aber F′C′ constant ist, so muss auch die Entfernung OD constant sein, und die Halbirungspunkte aller Geraden, welche man von F″ nach der Peripherie des Leitkreises F′ ziehen kann, liegen somit auf einer Kreislinie. Auf der Richtung F′F″ fällt der Convergenzpunkt der senkrechten Halbirungslinie des Stückes F″A′ und der Halbmesser F′A′ des Leitkreises mit dem Halbirungspunkt des Stückes F′A′ selbst zusammen, so dass also der Halbirungspunkt A dieses Stückes selbst ein Punkt des Kegelschnittes, und zwar der Scheitel desselben ist. Ebenso ist auch der Halbirungspunkt 𝔄 des anderen Stückes F″𝔄′ der Centralrichtung der andere Scheitel des Kegelschnitts. Der Kreis, welcher durch die Halbirungspunkte der Aehnlichkeitsstrahlen geht, hat also die Axe A𝔄 des Kegelschnitts zum Durchmesser.

Die zwei Constructionsmethoden, welche im Vorausgehenden behandelt wurden, ergeben sich, sobald der Kegelschnitt als der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises erkannt ist, welcher zwei gegebene Kreise berührt; es gesellen sich zu demselben noch zwei andere Methoden, sobald man die perspektivische Lage des Kegelschnitts mit seinen Leitkreisen erkannt hat. Diese Lage zeigt nämlich, dass der Aehnlichkeitspunkt O′ im System des Leitkreises (Figur 59) und der Mittelpunkt O im System des Kegelschnitts zwei homologe Punkte des Kegelschnitts und des Leitkreises sind (§. 89, d). Zieht man also von diesen Punkten aus nach einem beliebigen Punkt γ' der Collineationsaxe (welche mit der Potenzlinie der zwei Leitkreise zusammenfällt), zwei Gerade, so sind diess homologe Linien, §. 46, a. Die Gerade $O'\gamma'$ in dem System des Leitkreises schneidet den Leitkreis F′ in den Punkten C′ und ℭ′; zieht man also nach diesen Punkten die Collineations-

strahlen $F'C'$ und $F'\mathfrak{C}'$, so bestimmen sie auf $O\gamma'$ die collineären Punkte C und $\mathfrak{C}$ in dem System des Kegelschnitts (§. 46, a), folglich sind C und $\mathfrak{C}$ diejenigen Punkte des Kegelschnitts, welche den Punkten C' und $\mathfrak{C}'$ des Leitkreises F' homolog sind. Auf gleiche Weise kann man noch beliebig viele andere Punkte des Kegelschnitts construiren, und zwar, wie man sieht, ebenfalls durch ein lineäres Verfahren, sobald der Aehnlichkeitspunkt und die Potenzlinie der zwei Leitkreise bestimmt ist. Diese auf der Collineation beruhende lineare Construction des Kegelschnitts hat noch den Vorzug vor der in §. 90 angegebenen, dass sie von allgemeinerer Anwendbarkeit ist, denn sie beschränkt sich nicht blos auf die Fälle, wo beide Leitkreise endliche Dimension haben, sondern sie kann auch noch da benützt werden, wo einer der Leitkreise durch einen Punkt oder durch eine Gerade ersetzt ist. Sie gewinnt im Gegentheil noch an Einfachheit, wenn einer der Kreise eine solche extreme Gestalt besitzt. Denn ist der zweite Leitkreis F'' (Fig. 60) auf den Punkt F'' reduzirt, so ist dieser Punkt auch zugleich der Aehnlichkeitspunkt; man darf nur noch die Potenzlinie $\alpha\gamma$ zwischen dem Leitkreis F' und dem Punkt F'' suchen, um die Methode anwenden zu können. Zieht man nämlich alsdann nach einem beliebigen Punkt γ' dieser Potenzlinie die Geraden $O\gamma'$ und $F''\gamma'$, und nach dem Schnittpunkt C' der letztern den Halbmesser $F'C'$, so bestimmt er den Punkt C des Kegelschnitts. Ist aber einer der Leitkreise F'' unendlich gross (Fig. 59, c), so führt die Anwendung dieser Collineationsmethode ganz zu der gleichen Construction wie die Methode des §. 90. Diese Collineationsmethode verliert ihre Anwendbarkeit nur für den Fall, dass ein Leitkreis in Form einer Geraden und der andere in Form eines Punktes gegeben ist.

Die im Vorausgehenden angewendete Collineationsmethode beruht auf der Collineation des Kegelschnitts und seines Leitkreises, und benüzt den Aehnlichkeitspunkt und den Mittelpunkt des Kegelschnitts als zwei homologe Punkte zu ihren Anhaltspunkten. Hat man aber vorher durch eine der

vorausgehenden Methoden zwei andere homologe Punkte der Systeme bestimmt, so kann man auch von ihnen als den festen Anhaltspunkten ausgehen und im Uebrigen ganz auf gleiche Weise verfahren.

Man kann auch die Benützung zweier homologen Punkte ganz vermeiden, und dafür zu den Gegenaxen der Collineation rekurriren. Diess führt zu einer vierten Methode (Fig. 61). Construirt man nämlich auch noch zu dem Aehnlichkeitspunkt O′ in einem der Leitkreise F′ die Polare 𝔞𝔠, so ist sie die Gegenaxe in dem Systeme des Leitkreises (§. 89, f). Zieht man daher eine ganz beliebige Gerade MN, welche die Potenzlinie der zwei Leitkreise in dem Punkt γ schneidet, und zieht von dem Collineationscentrum F′ aus einen parallelen Collineationsstrahl F′𝔠, welcher die Gegenaxe in dem Punkte 𝔠 trifft, so ist die Verbindungslinie γ𝔠 im System des Leitkreises der Geraden MN im System des Kegelschnitts homolog (§. 47, e). Die Gerade γ𝔠 schneidet aber den Leitkreis in den Punkten C′ und 𝔖′, zieht man nach diesen Punkten die Collineationsstrahlen F′C′ und F′𝔖′, so bestimmen sie die homologen Punkte C und 𝔖 in dem Kegelschnitt (§. 45, a). Diese vierte Collineationsmethode ist ebenso allgemein anwendbar, wie die vorausgehende und bietet noch den Vortheil dar, dass sie die Punkte des Kegelschnitts liefert, die auf irgend einer beliebigen Geraden MN liegen.

Von den vier Methoden ist meines Wissens keine bekannt als die des §. 91, und auch sie ist hauptsächlich nur bei einer besondern Art des Kegelschnitts (der Parabel) gebräuchlich. Gerade die interessanteren rein linearen Constructionen wurden somit ausser Acht gelassen. Man kann gegen die andern Methoden etwa das einwenden, dass sie nicht von so allgemeiner Anwendbarkeit seien; allein es soll im nächsten Abschnitt nun gerade gezeigt werden, wie gegebene Leitkreise durch andere ersetzt werden können, und eben damit ist auch das Mittel an die Hand gegeben, jede der vier Methoden allgemein anwendbar zu machen.

C. Durch den Kreis vermittelte Construction der Kegelschnitte.

§. 94. Sind zwei Leitkreise gegeben und sind für einen ihrer Aehnlichkeitspunkte auf ihrer Centralen die Scheitelpunkte ihres Kegelschnitts construirt, so können die zwei gegebenen Leitkreise durch jede zwei andere Leitkreise ersetzt werden, welche mit den gegebenen concentrisch und ausserdem so beschaffen sind, dass auch ihre inversliegenden Punkte der Centralen gleichweit von den Scheitelpunkten des Kegelschnitts abstehen.

Man leitet hieraus folgende Regel zur Veränderung der Leitkreise ab:

Sind zwei Leitkreise gegeben und die Scheitelpunkte für den Kegelschnitt eines Aehnlichkeitspunktes construirt, so nehme man auf beiden Seiten eines Scheitelpunktes in gleichem Abstand zwei andere Punkte, und construire aus dem Mittelpunkte des einen Leitkreises einen concentrischen Kreis, welcher durch den einen dieser Punkte geht, und aus dem Mittelpunkte des andern Leitkreises einen concentrischen Kreis, welcher durch den andern jener Punkte geht, so liefern die auf diese Weise gezeichneten Kreise für den entsprechenden Aehnlichkeitspunkt denselben Kegelschnitt, wie die gegebenen Leitkreise.

§. 95. Die Leitkreise eines Kegelschnitts gestatten solche Veränderungen, welche werth sind, etwas genauer gekannt zu werden.

a) Wenn zwei Leitkreise von endlicher Dimension gegeben sind, so kann man statt ihrer immer auch solche setzen, von welchen der eine oder auch der andere auf Null reducirt ist; umgekehrt: wenn ein Punkt und ein Leitkreis von endlicher Dimension zur Entwicklung eines Kegelschnitts gegeben sind, so können immer auch zwei Leitkreise endlicher Dimension für sie substituirt werden.

b) Auch wenn unter den gegebenen Leitkreisen eines Kegelschnitts einer unendlich gross ist, und also die Form einer Geraden hat, so können immer solche Leitkreise für sie gesetzt werden, von welchen der endliche Leitkreis auf einen Punkt reduzirt ist; und umgekehrt: wenn ein Punkt und eine Gerade zur Entwicklung eines Kegelschnitts gegeben sind, so kann immer auch ein endlicher Kreis und eine Gerade für sie substituirt werden.

c) Wenn unter den zwei Leitkreisen keiner die Form einer Geraden hat, so kann auch durch keine Veränderung der Leitkreise eine solche gewonnen werden, und umgekehrt, wenn unter den gegebenen

Leitkreisen einer die Form einer Geraden hat, so kann auf keine Weise diese Gerade durch einen endlichen Kreis ersetzt werden.

d) Statt zweier Punkte können zwei endliche, gleich grosse Leitkreise gesetzt werden, und umgekehrt: Zwei Gerade können immer nur wieder durch ein anderes Paar Gerade ersetzt werden.

§. 96. Wenn zwei Leitkreise, die zur Entwicklung eines Kegelschnitts gegeben sind, auseinander oder ineinander liegen, so dass sie sich nicht schneiden, so können sie immerhin auch durch zwei Schnittkreise ersetzt werden, und die Schnittpunkte dieser Leitkreise sind immer zugleich auch Punkte ihrer Kegelschnittcurve.

Diese Eigenschaft der Leitkreise eines Kegelschnitts liefert eine weitere Methode zur Construction der Kegelschnitte, welche auf alle Arten der Leitkreise, auch wenn sie beliebig extreme Dimensionen haben, anwendbar ist. Man setze nämlich statt der gegebenen Leitkreise immer wieder andere Paare von Schnittkreisen nach der Regel des §. 94, so werden die Schnittpunkte derselben eben so viele Paare von Punkten des Kegelschnitts liefern.

In dem Fall, dass der Leitkreis unendlich gross ist und ein endlicher Bogen desselben in Form einer Geraden gegeben ist, hat man zu bemerken, dass alle unendlich grossen concentrischen Kreise, in ihren endlichen Bogen als parallele Gerade erscheinen.

Wenn im vorausgehenden Abschnitt die gegebenen Leitkreise als constant betrachtet wurden, so bleibt jetzt zu untersuchen, ob die Leitkreise nicht verändert werden können, ohne dadurch die Eigenschaft zu verlieren, ganz denselben Kegelschnitt zu liefern. Sind nun F' und F'' zwei Leitkreise, Fig. 62, welche die Centrale in den Punkten A' und $\mathfrak{A}'$, A'' und $\mathfrak{A}''$ schneiden, so haben für den innern Aehnlichkeitspunkt die Schnittpunkte A' und A'', so wie $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ eine inverse Lage, die Mitte A des Stückes $A'A''$ und die Mitte $\mathfrak{A}$ des Stückes $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ sind also die Scheitel des Kegelschnitts, der zum innern Aehnlichkeitspunkt gehört. Nimmt man nun rechts und links vom Scheitel A die Punkte a' und a'', so dass $Aa' = Aa''$, und zieht aus F'' mit $F''a''$ und aus F' mit $F'a'$ zwei Kreise, so werden auch die Kreise $F'a'$ und $F''a''$ zu demselben Kegelschnitt führen, wie die gegebenen Leitkreise. Denn es sei C ein Erzeugungskreis des innern Aehnlichkeits-

punktes, d. h. ein Kreis, welcher die gegebenen Leitkreise ungleichartig in den Punkten C' und C'' berührt, so liegen die Punkte C', C und F', sowie die Punkte $C''C$ und F'' je in gerader Richtung. Weil nun der Scheitelpunkt A sowohl in der Mitte von $A'A''$, als auch in der Mitte von $a'a''$ liegt, so folgt, dass $A'a' = A''a''$, die Kreise $F'a'$ und $F''a''$ werden also auch die Richtungen CC' und CC'' in solchen Punkten c' und c'' schneiden, dass $C'c' = C'c''$. Wenn man hier $CC' = CC''$ addirt, so kommt $Cc' = Cc''$; ein aus C mit Cc' beschriebener Kreis geht also auch durch c'' und berührt die Ersatzkreise in den Punkten c' und c''. Man schliesst hieraus, dass die gegebenen Kreise und die zwei Ersatzkreise concentrische Berührungskreise sind, oder dass die Mittelpunkte der Berührungskreise der gegebenen Leitkreise, und die der zwei Ersatzkreise, aufeinander fallen. Es liefern also auch die letztern ganz denselben Kegelschnitt wie die erstern. Es ist noch zu bemerken und ganz auf demselben Wege zu beweisen, dass man zum gleichen Resultat gelangt, wenn aus F' mit dem Halbmesser $F'a''$ und aus F'' mit dem Halbmesser $F''a'$ Kreise beschrieben werden. Auch diese Kreise $F'a''$ $F''a'$ haben einen Berührungskreis $C\gamma'$, der mit dem Berührungskreis CC' der gegebenen Leitkreise concentrisch ist, auch sie können daher als Ersatzkreise für die gegebenen Leitkreise benutzt werden. Auch ist der Fall des Kegelschnitts des äussern Aehnlichkeitspunktes so übereinstimmend mit dem Fall des innern Aehnlichkeitspunktes, dass auf die Analogie verwiesen und die Gültigkeit des Satzes für alle Fälle festgestellt werden kann.

Unter den besonderen Fällen, die durch die Veränderung der Leitkreise erzielt werden können, mag namentlich darauf aufmerksam gemacht werden, dass zwei gegebene Leitkreise, von denen keiner auf einen Punkt reduzirt ist, immer durch zwei Paare von Leitkreisen ersetzt werden können, von welchen der eine oder der andere diese Reduction erfahren hat. Nimmt man nämlich $Af' = AF''$ (Fig. 63, a) und beschreibt aus F' mit $F'f'$ den einen Ersatzkreis, so muss der andere Ersatzkreis,

der aus F'' beschrieben werden soll, auch durch F'' gehen, das heisst, er muss die Gestalt des Punktes haben. Macht man aber $Af'' = AF'$ und beschreibt aus F'' mit $F''f''$ den einen Ersatzkreis, so muss der andere Ersatzkreis F' die Gestalt des Punktes annehmen. Es ist aber einleuchtend, dass diese Reduction eines Leitkreises auf einen Punkt immer möglich sein muss, so lange der gegebene Leitkreis nicht unendlich gross ist. Wenn aber eine Gerade und ein endlicher Kreis gegeben sind, so kann sehr wohl der endliche Kreis auf einen Punkt reduzirt werden. Nimmt man hier $Af'' = AF'$ und zieht durch f'' eine Gerade $f''c'' \parallel A''C''$, so ist $f''c''$ der Bogen des unendlich grossen Ersatzkreises, und der endliche Ersatzkreis wird auf einen Punkt reduzirt, Fig. 63, b. Umgekehrt: wenn nach der allgemeinen Regel nun ein Punkt F' und eine Gerade $f''c''$ gegeben sind, so kann ein endlicher Ersatzkreis $F'A'$ und ein unendlicher $A''C''$ für jene gesetzt werden.

Ueberhaupt ist leicht einzusehen, dass, wenn ein unendlich grosser Leitkreis gegeben ist, derselbe durch keine endliche Veränderung der Leitkreise den Charakter des Unendlichgrossen aufgeben kann, weil durch Hinzuthun oder Hinwegnehmen von endlichen Stücken das Unendlichgrosse keine Veränderung zu erleiden vermag. Die zur Entwicklung der Kegelschnitte gegebenen Leitkreise besitzen daher nur dann einen unveräusserbaren Charakter, wenn einer derselben unendlich gross, also durch eine gerade Linie ersetzt ist.

Dass zwei Punkte durch zwei gleich grosse Kreise und zwei Gerade durch zwei andere parallele Gerade in gleicher Entfernung ersetzt werden können, wird man leicht einsehen.

Ein besonders für die Construction der Kegelschnitte wichtiges Moment, das bei der Veränderung der Leitkreise in Betracht kommt, bieten die Ersatzkreise, welche sich schneiden.

Zu jedem Paar von Punkten a' und a'' (Fig. 62, a), welche gleichen Abstand vom Scheitel A haben, gehören immer zwei Paare von Ersatzkreisen, nämlich die Ersatzkreise $F'a'$ und $F''a''$ und die Ersatzkreise $F'a''$ und $F''a'$. Unter diesen zwei Paaren von Ersatzkreisen ist nothwendig

immer ein solches, das aus zwei Schnittkreisen besteht. Denn wird F''a'' vom Kreis F'a' eingeschlossen, so liegt F'' im Kreis F' a'', und a' ausserhalb des Kreises F' a''; der Kreis F' a'' muss also den Kreis F''a' durchschneiden. Die Schnittpunkte P und 𝔓 zweier sich schneidender Ersatzkreise sind aber selbst Punkte auf dem Kegelschnitt, der aus ihnen sich entwickelt. Denn man sieht wohl, dass der Berührungskreis C mit seiner Annäherung an den Schnittpunkt P immer kleiner, und in demselben selbst auf einen Punkt reduzirt wird, so dass also P selbst ein Punkt des Kegelschnitts ist. Man wird aber auch leicht direkt beweisen, dass ein aus P beschriebener Kreis, welcher den einen Kreis F'A' berührt, auch den andern F''A'' berühren muss.

Diese Eigenschaft der Schnittpunkte der Leitkreise eines Kegelschnitts gibt ein weiteres, sehr einfaches Mittel zur Construction desselben. Nimmt man immer wieder andere Punktpaare in gleicher Entfernung von einem Schnittpunkt A des Kegelschnitts, und zeichnet für jedes derselben dasjenige Paar der Ersatzkreise, deren Peripherie einander schneiden, so liefern die Schnittpunkte derselben eben so viele Punktpaare der Kegelschnittlinie. Es ist noch zu bemerken, dass diese Methode auf alle Leitkreise gleichmässig anwendbar ist, und dass auch der Fall nicht ausgenommen ist, wenn einer der Leitkreise oder sogar beide durch gerade Linien vertreten sind. Diese Methode der Construction der Kegelschnitte ist die bekannteste und namentlich zur Construction derjenigen Kegelschnitte (Ellipse und Hyperbel) gebräuchlich, *) welche aus solchen Leitkreisen sich entwickeln lassen, von denen keiner unendlich gross ist. Sie ist jedoch auch ebenso gut für die Fälle (der Parabel) anwendbar, wo ein Leitkreis durch eine

---

*) Man wird leicht bemerken, dass die hier angegebene Construction mit derjenigen identisch ist, welche auf der Eigenschaft beruht, dass die Summe oder Differenz der Brennstrahlen eines jeden Punktes der Kegelschnittcurve der Axe gleich ist. Die Form, in welcher sie durch die Veränderung der Leitkreise erscheint, hat aber den Vorzug der Allgemeinheit, sofern dieselbe Regel für die Ellipse, Hyperbel und Parabel anwendbar ist.

Gerade vertreten ist, sobald man bemerkt, dass parallele Gerade als endliche Bögen unendlich grosser concentrischer Kreise betrachtet werden können. Um diess zu zeigen, ist Figur 62, c gezeichnet, die sich selbst erklärt.

D. Entwicklung der Kegelschnitte aus den Direktrizen.

§. 97. In dem besonderen Fall, wo einer der zwei Leitkreise eines Kegelschnitts auf einen Punkt reduzirt ist, wird die Collineationsaxe des Kegelschnittes und seines Leitkreises Direktrize genannt.

Da aber jeder der zwei Leitkreise auf einen Punkt reduzirt werden kann, so gehören auch zu jedem Kegelschnitt zwei Direktrizen. Dabei heisst die Direktrize dem Brennpunkte zugehörig, welcher die Reduktion zum Punkte erlitt.

So oft ein Leitkreis eines Kegelschnitts auf einen Punkt reduzirt ist, ist der Halbmesser des andern Leitkreises der Axe des Kegelschnitts gleich. Man erhält also die zwei Leitkreise, aus welchen je mit dem andern Brennpunkt der Kegelschnitt entwickelt werden kann, wenn man aus den zwei Brennpunkten mit der Axe des Kegelschnitts zwei Kreise beschreibt.

Die zwei Direktrizen des Kegelschnitts liegen in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkt des Kegelschnitts.

Die zwei Direktrizen liegen im endlichen Raum, wenn keiner der Leitkreise unendlich gross ist; ist einer der Leitkreise unendlich gross, so liegt auch eine Direktrize im unendlichen Raum; sind beide Leitkreise unendlich gross, so liegen beide Direktrizen im unendlichen Raum.

§. 98. Da immer ein Leitkreis auf einen Punkt reduzirt werden kann, wenn nicht beide Leitkreise unendlich gross sind, so ergibt sich für die Tangenten der Kegelschnitte folgende Eigenschaft:

Wenn der Scheitel eines rechten Winkels auf der Peripherie eines über der Axe des Kegelschnitts als Durchmesser construirten Kreises liegt und ein Schenkel desselben durch den Brennpunkt geht, so berührt der andere Schenkel den Kegelschnitt, und umgekehrt: wenn ein Schenkel dieses rechten Winkels den Kegelschnitt berührt, so geht der andere Schenkel durch einen Brennpunkt des Kegelschnitts.

§. 99. Die Direktrize hat in Betreff der Construction des Kegelschnitts folgende bemerkenswerthe Eigenschaften:

a) Die Entfernungen eines Punktes der Kegelschnittlinie von

einem Brennpunkt und der zugehörigen Direktrize haben ein constantes Verhältniss zu einander, welches der Excentricität des Kegelschnitts gleich ist.

b) Die Axe ist das geometrische Mittel zwischen der Entfernung der Brennpunkte und der Entfernung der zwei Direktrizen.

Dieses constante Verhältniss, in welchem die Abschnitte zwischen einem Punkte der Kegelschnittlinie von der Direktrize und ihrem zugehörigen Brennpunkte stehen, gibt ein weiteres Mittel zur Construktion, welches namentlich dann sehr einfach wird, wenn der Hauptparameter schon construirt ist.

Die übrigen Eigenschaften der Direktrizen werden bei der Polarität der Kegelschnitte betrachtet werden.

Wenn man den extremen Fall ausschliesst, da beide gegebenen Leitkreise eines Kegelschnitts unendlich gross sind, so folgt aus §. 95, dass die Leitkreise immer durch solche andere concentrische Kreise ersetzt werden können, von welchen einer auf einen Punkt reducirt ist. Und dieser einfache Fall führt zu manchen allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte, von denen hier diejenigen untersucht werden sollen, die für die Construktion von Wichtigkeit sind. Ist F′ der Leitkreis und F″ der Punkt, aus welchem der Kegelschnitt A𝔄 construirt ist (Fig. 60), so lehrt §. 91, dass die Scheitelpunkte A𝔄 der Centralen F′F″ die Stücke F″A′ und F″𝔄′ halbiren; es ist also

$$F''A = \tfrac{1}{2} F''A', \; F''\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} F''\mathfrak{A}',$$

folglich $A\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(F''\mathfrak{A}' \pm F''A) = \tfrac{1}{2} A'\mathfrak{A}' = F'A'$

wo das Zeichen + gilt, wenn der Punkt F″ im Leitkreis F′ liegt (Fig. 60, a), und das Zeichen —, wenn er ausserhalb desselben liegt (Fig. 60, b).

Nimmt man also den Halbmesser eines Leitkreises der Axe des Kegelschnitts gleich, so reducirt sich der zugehörige andere Leitkreis auf einen Punkt, den andern Brennpunkt des Kegelschnitts. Wenn einer der Leitkreise unendlich gross ist, so kann nur der endliche Leitkreis auf einen Punkt reducirt werden (§. 95, b). Ist aber diess nach der Regel (§. 94) geschehen, so folgt aus §. 91, dass dann der Scheitel A des

Kegelschnitts das Stück F''A' zwischen dem Brennpunkte F'' und der Geraden A'C' halbirt. Umgekehrt, will man den endlichen Leitkreis auf den Punkt F'' reducirt haben, so wähle man nur zum unendlich grossen Kreis eine Gerade, deren Abstand vom Brennpunkt F' = 2 AF' ist (Fig. 60, c).

Für diesen Fall nimmt aber die Regel (§. 89, c) eine bemerkenswerthe Gestalt an. Zieht man vom Brennpunkt F'' aus in dem mit A𝔄 beschriebenen Leitkreis F' (Fig. 60) eine Gerade F''C', so ist die senkrechte Halbirungslinie dieser Geraden eine Tangente des Kegelschnitts, und es liegt der Halbirungspunkt D auf dem Umfange eines über der Axe A𝔄 als Durchmesser beschriebenen Kreises (§. 91). Umgekehrt wird man auch schliessen, dass, wenn der Scheitel eines rechten Winkels auf dem Umfange dieses Kreises liegt, und der eine Schenkel den Kegelschnitt in einem Punkte O berührt, der andere Schenkel durch den Brennpunkt F' geht; denn sonst müsste man ja in D noch eine zweite Gerade F''D ziehen können, die auch auf CD senkrecht wäre, was unmöglich ist.

Zu diesen Eigenschaften, welche als besondere Fälle in den früheren schon enthalten sind, kommen noch solche, welche die Collineationsaxe zwischen dem Leitkreis und dem Kegelschnitt betreffen und sie sind merkwürdig genug, um diese Collineationsaxe durch den besonderen Namen der Direktrizen auszuzeichnen.

Man weiss, dass die Kegelschnittcurve die Mittelpunkte aller Berührungskreise zweier gegebenen Kreise enthält (§. 87), und dass die Collineationsaxe zwischen dem Kegelschnitt und einem Leitkreis ein gemeinschaftlicher Aehnlichkeitsstrahl aller Berührungskreise ist (§. 85, b), und dass desshalb der Halbmesser des Berührungskreises zum Abstand seines Mittelpunktes von der Collineationsaxe ein constantes Verhältniss hat (§. 79). Diese letztere Eigenschaft kann auch, wie überhaupt jede allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte, zur Entwicklung der Kegelschnitte gebraucht werden. Man kann sagen, der Kegelschnitt ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, deren

Entfernungen von einem gegebenen Kreis und einer gegebenen Geraden ein constantes Verhältniss haben.

Diese Eigenschaft der Kegelschnitte nimmt noch eine einfachere Form an, wenn man die Leitkreise so wählt, dass einer derselben auf einen Punkt reduzirt ist. Die Punkte der Kegelschnittcurve haben nämlich alsdann eine solche Lage, dass ihre Entfernungen von der Direktrize und dem zugehörigen Brennpunkt ein constantes Verhältniss haben. Auch kann man den Satz umkehren und sagen, der Kegelschnitt ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkte ein constantes Verhältniss haben. Weil man aber, wenn die zwei Leitkreise endliche Dimensionen haben, nach einander beide auf einen Punkt reduziren kann, so erhält man auch für jeden Kegelschnitt zwei Direktrizen. Beschreibt man aus F' und F'' nach einander mit $A\mathfrak{A}$ zwei Kreise, so ist die Potenzlinie $\alpha\gamma$ zwischen dem Kreis $F'A'$ und dem Punkt F'' die eine Direktrize, und die Potenzlinie $\alpha'\pi'$ zwischen dem Kreis $F''A''$ und dem Punkt F' die andere Direktrize. Weil aber die zwei Kreise $F'A'$ und $F''A''$, da sie mit demselben Halbmesser $A\mathfrak{A}$ construirt sind, congruent sind, und da auch die Entfernung der Punkte F' und F'' vom Mittelpunkt der Kreise dieselbe ist, so sind auch die Punkte F' und F'' dieser Kreise beziehlich uniform liegende Punkte, es werden daher auch die Direktrizen als die Potenzlinien beziehlich uniform liegende Linien sein, so dass auch $F''\alpha = F'\alpha'$ und also auch $O\alpha = O\alpha'$.

Um den Werth des constanten Verhältnisses $F'D : D\delta$ (Fig. 64) der Entfernungen eines Punktes der Kegelschnittcurve von einem Brennpunkt und der zugehörigen Direktrizen auf seinen einfachsten Ausdruck zu bringen, wählt man die Scheitel A und $\mathfrak{A}$ (Fig. 60), für welche nach diesem Gesetze

$$F''\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\alpha = F''A : A\alpha,$$

woraus $$F''\mathfrak{A} - F''A : \mathfrak{A}\alpha - A\alpha = F''A : A\alpha,$$ oder

$$F'F'' : A\mathfrak{A} = F''A : A\alpha,$$

d. h. jenes constante Verhältniss ist der Excentrizität des Kegelschnittes gleich. Aus derselben Proportion folgt aber auch

$$F''\mathfrak{A} + F''A : \mathfrak{A}\alpha + A\alpha = F''A : A\alpha \text{ oder}$$
$$A\mathfrak{A} : \alpha\alpha' = F''A : A\alpha,$$
also ist $$F'F'' : A\mathfrak{A} = A\mathfrak{A} : \alpha\alpha'$$
d. h. die Axe ist das geometrische Mittel zwischen der Entfernung der Brennpunkte und der Entfernung der Direktrizen. Jenes constante Verhältniss kann auch zur Construction des Kegelschnitts gebraucht werden, namentlich wenn ein Parameter gegeben ist. Zieht man nämlich vom Brennpunkt F′ und vom Ende C des Hauptparameters (Fig. 64) zwei Gerade durch einen Punkt D der Kegelschnittcurve, welche die Direktrize in den Punkten M und N schneiden, und die Gerade $F'\alpha$, $D\delta$, $C\gamma$ senkrecht auf die Direktrize, so ist, weil $F'C \parallel MN$
$$F'D : F'C = DM : MN,$$
und weil die Punkte D und C auf der Kegelschnittcurve liegen, und $C\gamma = F'\alpha$ ist
$$F'D : F'C = D\delta : F'\alpha,$$
und endlich weil $F'\alpha \parallel D\delta$ ist
$$DM : F'M = D\delta : F'\alpha.$$

Aus diesen drei Proportionen folgt $DM : MN = DM : F'M$. Es ist also $MN = F'M$. Macht man also umgekehrt $MN = F'M$ und zieht die Gerade CN, so schneidet sie die Gerade F′M in einem Punkt des Kegelschnitts. Auf diese Weise kann man mit Leichtigkeit beliebig viele Punkte auf der Kegelschnittcurve bestimmen.

E. Eintheilung der Kegelschnitte.

§. 100. Der Kegelschnitt heisst Ellipse, wenn alle seine Punkte im endlichen Raum liegen.

Eine Ellipse liefern zwei Leitkreise endlicher Dimension, deren Aehnlichkeitspunkt in der Fläche der Leitkreise liegt.

Alle in einander liegenden endlichen Kreise liefern daher sowohl für ihren innern als auch für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt eine Ellipse. Zwei Schnittkreise liefern nur für ihren innern Aehnlichkeitspunkt eine Ellipse. Ein Punkt und ein Kreis liefern nur dann eine Ellipse, wenn der Punkt in der Kreisfläche liegt.

§. 101. Der Kegelschnitt heisst Hyperbel, wenn er mit zwei Punkten seines Umfanges im unendlichen Raum liegt.

Eine Hyperbel liefern zwei Leitkreise endlicher Dimension, wenn deren Aehnlichkeitspunkt ausserhalb der Fläche der Leitkreise liegt.

Alle auseinander liegenden endlichen Kreise liefern daher sowohl für ihren äussern als auch für ihren innern Aehnlichkeitspunkt eine Hyperbel; zwei Schnittkreise liefern nur für ihren äussern Aehnlichkeitspunkt eine Hyperbel. Ein Punkt und ein Kreis liefern nur dann eine Hyperbel, wenn der Punkt ausserhalb der Kreisfläche liegt.

§. 102. Der Kegelschnitt heisst Parabel, wenn er mit einem einzigen Punkt im unendlichen Raum liegt.

Eine Parabel liefern zwei Leitkreise, von denen der eine von endlicher und der andere von unendlicher Dimension ist. Der Aehnlichkeitspunkt solcher Leitkreise hat gegen die zwei Leitkreise eine ungleichartige Lage; er liegt auf der Peripherie des endlichen Leitkreises, aber innerhalb oder ausserhalb der Fläche des unendlich grossen Leitkreises.

Nur ein endlicher Kreis und eine Gerade, oder ein Punkt und ein Kreis liefern also eine Parabel.

Ausser den Fällen, die in den vorausgehenden Nummern angeführt sind, gibt es noch solche, welche extremer Natur sind und einen Kegelschnitt von der abnormen Gestalt der Geraden liefern. Dahin gehören die Kegelschnitte der Berührungskreise für den Berührungspunkt als Aehnlichkeitspunkt und die Kegelschnitte, welche aus zwei unendlich grossen Kreisen, d. i. aus zwei Geraden entwickelt werden. So oft daher von Kegelschnitten die Rede ist, so hat man von diesen extremen Gestalten zu abstrahiren.

Die Kegelschnitte sind collineäre Curven des Kreises und sind Curven der zweiten Ordnung, d. h. solche Curven, welche von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten werden können. Nimmt man bei der Collineation des Kreises und des Kegelschnitts Rücksicht auf die Gegenaxen, so sind drei Fälle möglich, indem der Kreis von der Gegenaxe seines Systems entweder in keinem Punkt, in einem Punkt oder in zwei Punkten geschnitten werden kann. Im ersten Fall ist aber der Kegelschnitt nach §. 63, a eine geschlossene, im endlichen Raum liegende Curve und heisst Ellipse, im zweiten Fall liegt

sie mit einem Punkt im unendlichen Raum und verläuft nach zwei Seiten hin in's Unendliche, im dritten Fall besteht sie aus zwei auseinander liegenden Aesten und heisst Hyperbel. Es fragt sich nun, zu welcher Art dieser Curven wird man geführt, wenn man den Kegelschnitt aus zwei Leitkreisen construirt.

Für den Fall der perspektivischen Lage des Kegelschnitts und seines Leitkreises folgt aber aus §. 89, f, dass der Aehnlichkeitspunkt O' der zwei Leitkreise und die Gegenaxe $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$ im System des Leitkreises F' sich zu einander verhalten wie Pol und Polare. Liegt also die Gegenaxe ausserhalb des Leitkreises (Fig. 59, a), so liegt der Aehnlichkeitspunkt in den Leitkreisen; liegt die Gegenaxe $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$ innerhalb des Leitkreises F' (Fig. 59, b), so liegt der Aehnlichkeitspunkt O' ausserhalb der Leitkreise. Im ersten Fall wird also der Kegelschnitt die Gestalt der Ellipse, im zweiten Fall die Gestalt der Hyperbel haben.

Die zwei vorausgehenden Fälle setzen zwei Leitkreise von endlicher Form voraus; und der dritte noch denkbare Fall, wo die Gegenaxe den Leitkreis berührt, führt zu einer extremen Gestalt. Denn hier muss der Aehnlichkeitspunkt auf der Peripherie des Leitkreises im Berührungspunkt der Gegenaxe liegen. Diess ist aber bei endlichen Kreisen nur der Fall, wenn beide Leitkreise sich in eben diesem Punkte berühren (§. 78, a). Ein Berührungskreis, der zu diesem Aehnlichkeitspunkt gehört, kann aber die Leitkreise in keinem andern Punkt, als in eben diesem Aehnlichkeitspunkt berühren, der Mittelpunkt des Ergänzungskreises muss also auf der Centralen der zwei Leitkreise selbst liegen, und der Kegelschnitt erscheint hier als eine Gerade, welche mit jenen Centralen zusammenfällt. Dass hier der Kegelschnitt in Form einer Geraden auftritt, widerspricht dem Satz 86 nicht, denn es kann ja auch die Gerade als ein endlicher Theil eines unendlich grossen Kreises betrachtet werden.

Wenn aber einer der zwei Leitkreise die Gestalt der Geraden hat, dann liegt ihr Aehnlichkeitspunkt auf dem Umfang des endlichen Kreises in dem Endpunkte eines Durch-

messers, welcher auf der Geraden senkrecht steht. Hier erscheint also noch ein dritter Fall, in welchem der Kegelschnitt die Gestalt einer Curve an sich trägt. Die Gegenaxe $\mathfrak{A}'c'$ (Fig. 59, c) geht durch den Aehnlichkeitspunkt O', und die dem Leitkreis collineäre Curve AC erscheint als eine beiderseits in's Unendliche sich verlaufende krumme Linie, welche sich erst in dem Punkt des unendlichen Raumes schliesst, der dem Punkt $\mathfrak{A}'$ der Gegenaxe homolog ist; dieser Kegelschnitt heisst Parabel.

Man wird nun leicht finden, dass, wenn die zwei Leitkreise in einander liegen, auch ihre zwei Aehnlichkeitspunkte in denselben liegen, solche Leitkreise führen also nur zu Ellipsen.

Wenn sich zwei Kreise schneiden, so liegt ihr innerer Aehnlichkeitspunkt zwischen den Mittelpunkten (§. 77, e) innerhalb der Kreise, und der zugehörige Kegelschnitt ist eine Ellipse. Der andere Aehnlichkeitspunkt liegt aber ausserhalb der Centralen (§. 77) und ausserhalb der Kreise; der zugehörige Kegelschnitt ist also eine Hyperbel.

Wenn sich zwei Kreise berühren, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt auf dem Berührungspunkt, und der zugehörige Kegelschnitt ist eine extreme Gestalt gerader Richtung. Der äussere Aehnlichkeitspunkt liegt aber auf der Verlängerung der Centraldistanz ausserhalb der Kreise, und der zugehörige Kegelschnitt ist also eine Hyperbel.

Die eingehende Betrachtung der besondern Kegelschnitte ist späteren Abschnitten vorbehalten.

Siebentes Buch.

Allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte.

A. Conformität der Kegelschnitte.

§. 103. Die Conformität ist eine allgemeine Eigenschaft aller Kegelschnitte und begreift folgende Merkmale in sich:

a) Jede zwei Vielstrahlen, deren homologe Strahlen in Punkten einer Kegelschnittcurve convergiren, und deren Scheitel auf eben dieser Curve liegen, sind conform und liegen projektivisch gegen einander, und zwar sind die Strahlen, welche in ihrer Scheitellinie vereinigt sind, denjenigen Strahlen homolog, welche den Kegelschnitt berühren.

b) Wenn zwei conforme Vielstrahlen projektivisch gegen einander liegen, so convergiren ihre homologen Strahlen in Punkten einer Kegelschnittcurve, welche durch die Scheitel der Vielstrahlen geht und diejenigen Strahlen berührt, welche den in ihrer Scheitellinie vereinigten Strahlen homolog sind. Es ist also jeder Kegelschnitt durch fünf Punkte seines Umfangs vollkommen bestimmt.

c) Jede Schaar von Tangenten, welche einen Kegelschnitt berühren, haben die Eigenschaft, alle anderen Tangenten desselben Kegelschnitts conform in projektivischer Lage zu theilen, und zwar sind die in dem Convergenzpunkt zweier Tangenten vereinigten Theilpunkte den Berührungspunkten homolog.

d) Wenn zwei conforme Punktreihen projektivisch gegen einander liegen, so berühren sie und ihre Projektionsstrahlen einen Kegelschnitt, und zwar sind ihre Berührungspunkte mit denjenigen Punkten ihrer Richtungen homolog, welche in ihrem Convergenzpunkt vereinigt sind. Es ist also jeder Kegelschnitt durch fünf Tangenten vollkommen bestimmt.

§. 104. Die Eigenschaft der Conformität der Kegelschnitte kann in einer andern Form auf folgende Weise ausgedrückt werden:

a) Jedes Sechseck, das in einen Kegelschnitt beschrieben ist, hat die Eigenschaft, dass die drei Convergenzpunkte seiner Gegenseiten in einer Richtung liegen. Umgekehrt: jedes Sechseck, dessen Gegenseiten in drei Punkten einer Richtung convergiren, hat die Eigenschaft, dass ein Kegelschnitt, aber auch nur ein einziger, um dasselbe beschrieben werden kann.

b) Jedes Sechsseit, das um einen Kegelschnitt beschrieben ist, hat die Eigenschaft, dass die drei Verbindungslinien seiner Gegenecken in einem Punkte convergiren. Umgekehrt: jedes Sechsseit, dessen Gegenecken auf drei in einem Punkte convergirenden Geraden liegen, hat die Eigenschaft, dass ein Kegelschnitt, aber auch nur ein einziger, um dasselbe beschrieben werden kann.

c) Ist ein Viereck in einen Kegelschnitt beschrieben, so convergiren die Tangenten zweier Gegenecken in einem Punkte der Diagonale, welche die Convergenzpunkte der zwei Gegenseiten verbindet.

d) Ist ein Vierseit um einen Kegelschnitt beschrieben, so convergiren die Verbindungslinien der Berührungspunkte seiner Gegenseiten in dem Convergenzpunkt der Diagonalen seiner Gegenecken.

Wenn der Begriff des Kegelschnitts auf die Collineation mit dem Kreise zurückgeführt wird (§. 86), so ist eben damit auch ausgesprochen, dass der Kegelschnitt an vielen Eigenschaften des Kreises Theil habe, nämlich an allen denjenigen, welche diesen Curven als collineäre Figuren überhaupt gemeinschaftlich zukommen. Solche Eigenschaften nennt man projektivische und dieselben finden sich schon in §. 42, a — g aufgezählt. Es kann sich also jetzt nur noch darum handeln, die projektivischen Eigenschaften des Kreises aufzusuchen, um sie sogleich auch als Eigenschaften des Kegelschnitts auszusprechen. Diess ist jedoch nicht das einzige Geschäft, was diesem siebenten Buche vorbehalten ist, sondern es müssen jetzt, da man es nicht blos mehr mit einer besonderen Gestalt, sondern mit einer ganzen Klasse von Curven zu thun hat, auch manche Eigenschaften des Kreises verallgemeinert werden. So kommen den Kegelschnitten jedenfalls die in §. 104 ausgesprochenen Eigenschaften zu, weil sie rein projektivisch

sind, da es sich von nichts Anderm als vom Liegen gewisser Punkte in einer Richtung und vom Convergiren gewisser Richtungen in einem Punkte handelt.

Andererseits erscheint die Eigenschaft der Conformität bei dem Kegelschnitt doch auch in einer allgemeineren Gestalt. Im Kreis sind projektivisch inbeschriebene Vielstrahlen gleich, daraus folgt nicht, dass auch solche im Kegelschnitt inbeschriebene Vielstrahlen einander gleich sind. Sind nämlich O und Q zwei im Kreis projektivisch, d. h. solche inbeschriebene Vielstrahlen, deren Scheitel auf der Kreislinie liegen und deren homologen Strahlen in Punkten der Kreislinie convergiren, so entsprechen ihnen auch im collineären Kegelschnitt solche projektivisch inbeschriebene Vielstrahlen, O′ und Q′, da die homologen Punkte auf den homologen Linien liegen, und die homologen Linienpaare in homologen Punkten convergiren und es ist O′ ⊼ O und Q′ ⊼ Q (§. 42). Weil nun im Kreis die Vielstrahlen O und Q gleich sind, und das Gleichsein ein besonderer Fall des Conformseins ist, so folgt O′ ⊼ Q′. Während also im Kreise die projektivisch inbeschriebenen Vielstrahlen gleich sind, so folgt für die Kegelschnitte im Allgemeinen nur, dass solche Vielstrahlen conform sind.

Dieser allgemeine Satz hat auch seine Umkehrung. Wenn nämlich die Vielstrahlen O′ und Q′ conform in projectivischer Lage sind, so sind auf der Scheitellinie O′Q′ nicht zwei homologe Strahlen vereinigt, sondern es ist ein anderer Strahl O′E′ des Vielstrahls O′ dem Strahl Q′O′ des Vielstrahls Q′ homolog. Die übrigen homologen Strahlen convergiren in gewissen Punkten A′, B′, C′. Nun kann man aber in einem andern System einen Vielstrahl O, ABCQE zeichnen, der dem Vielstrahl O′ conform ist. Construirt man noch in dem ersteren Vielstrahl einen Kreis welcher durch O geht und den Strahl OE berührt, und die anderen Strahlen in den Punkten ABCQ schneidet, und zieht auch noch von Q aus Strahlen nach den Punkten A, B, C, O, so ist

Q, OABCE ⊼ O, EABCQ (§. 66),

und weil nach Voraussetzung

O, EABCQ $\barwedge$ O′, E′A′B′C′Q′ $\barwedge$ Q′, O′A′B′C′E′,
so folgt, dass auch Q, OABCE $\barwedge$ Q′, O′A′B′C′E′.

Es sind somit auch die Vielstrahlen Q und Q′ conform, und folglich ist das ebene System, welches durch die Vielstrahlen O′ und Q′ bestimmt wird, dem System collineär, welches durch die conformen Vielstrahlen O und Q bestimmt wird; es muss also auch der Kreislinie der letzteren eine Curve der ersteren entsprechen, welche durch die homologen Punkte O′A′B′C′Q′ geht, und zwar ist diese Curve ein Kegelschnitt (§. 86). Diese Beweisführung zeigt auch, dass ein Kegelschnitt durch fünf Punkte seines Umfanges bestimmt ist, weil durch die Punkte O, Q, A, B, C zwei Dreistrahlen O, ABC und Q, ABC gegeben sind, welche ihrerseits die Conformität der zwei Vielstrahlen O und Q bestimmen.

Hiemit wäre die eine Seite der Conformität der Kegelschnitte in ihrer Allgemeinheit aufgefasst. Sie hat aber noch eine zweite Seite, welche die Punktreihen betrifft, in welchen ein Paar von Tangenten durch alle übrigen Tangenten getheilt wird. Allein diese Eigenschaft tritt schon beim Kreise (§. 67) in ihrer Allgemeinheit auf, und weil sie lediglich projektivischer Natur ist (§. 42, f), so muss sie auch allen Kegelschnitten zukommen; es müssen nämlich jene Punktreihen conform in projektivischer Lage sein. Die Umkehrungsfähigkeit dieses Satzes ist leicht nachzuweisen. Vorausgesetzt nämlich, es seien fünf Richtungen gegeben, von welchen zwei in einem Punkte Q convergiren und von den anderen drei Richtungen in den Punkten A und $\mathfrak{A}$, B und $\mathfrak{B}$, C und $\mathfrak{C}$ geschnitten werden, so ist hiemit die Conformität der zwei Reihen ABC und $\mathfrak{ABC}$ bestimmt, und wenn diese Reihen projectivisch liegen, so entsprechen den in Q vereinigten Punkten zwei andere homologe Punkte O und $\mathfrak{O}$, welche sofort gezeichnet werden können. Nimmt man nun auf der Richtung A′Q′ eines anderen ebenen Systems die Punkte A′, B′, C′, Q′, O′, so dass A′B′C′Q′O′ $\barwedge$ ABCQO, und zeichnet einen Kreis, welcher die Richtung A′Q′ in dem Punkte O berührt, zieht sodann von den Punkten Q′, A′, B′, C′ Tangenten an diesen Kreis,

durch welche auf der von Q' ausgehenden Tangente noch die Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ bestimmt werden, so ist

$$A'B'C'Q'O' \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{O}'\mathfrak{Q}' \text{ (§. 67)},$$

und weil $ABCQO \barwedge \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{Q}$, n. An.

so folgt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{Q} \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{O}'\mathfrak{Q}'$.

Es sind sonach die zwei Punktreihen $ABCOQ$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{Q}\mathfrak{O}$ des einen Systems den zwei Punktreihen $A'B'C'O'Q'$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{Q}'\mathfrak{O}'$ des andern Systems conform, die Systeme selbst sind also collineär (§. 43, b), und es entspricht dem Kreis des einen Systems ein Kegelschnitt des andern Systems, welcher die gegebenen fünf Geraden berührt. Wollte man noch zu einem Projektionsstrahl $D\mathfrak{D}$ des ersten Systems den homologen Strahl $D'\mathfrak{D}'$ des zweiten Systems zeichnen, so folgt aus dem Umkehrungssatz von §. 67, dass ein solcher den Kreis berührt, es muss also auch der Projektionsstrahl $D\mathfrak{D}$ den Kegelschnitt berühren, welcher von den gegebenen fünf Richtungen berührt wird.

B. Involution der Kegelschnitte.

§. 105. Bringt man einen involutorischen Vielstrahl mit einer Kegelschnittcurve so in Verbindung, dass der Scheitel desselben auf der Curve liegt, so heissen die Punkte, in welchen sie von den Strahlen dieses Vielstrahls getroffen wird „involutorische Punkte der Curve.“

Solche involutorische Punkte der Kegelschnittcurve haben die Eigenschaft, dass sie mit irgend einem andern Punkt der Curve verbunden stets wieder einen involutorischen Vielstrahl bilden; auch theilen die Tangenten der involutorischen Punkte des Kegelschnitts jede andere Tangente desselben Kegelschnitts in einer involutorischen Punktreihe. Die ganze Involution des Kegelschnitts ist durch zwei Paare homologer Punkte vollkommen bestimmt, so dass zu jedem weiteren Punkt der Curven der homologe Punkt gefunden werden kann.

Man kann zwei Arten der Involution der Kegelschnitte unterscheiden:

a) Die zwei Reihen der homologen Punkte stehen in einstimmiger Aufeinanderfolge; dann gibt es nirgends einen Hauptpunkt, d. h. einen Ort, in welchem zwei homologe Punkte vereinigt wären.

b) Die zwei Reihen der homologen Punkte stehen in entgegengesetzter Aufeinanderfolge; dann gibt es immer zwei Hauptpunkte.

In dem letztern Falle bilden die zwei Hauptpunkte mit jedem andern Paar homologer Punkte vier harmonische Punkte der Curve, d. h. solche Punkte, welche mit jedem andern Punkt der Curve verbunden einen harmonischen Vielstrahl bilden, und deren Tangenten jede andere Tangente desselben Kegelschnitts harmonisch theilen.

§. 106. Die involutorischen Punkte des Kegelschnitts sind wirklich homologe Punkte zweier involutorischen Collineationssysteme und haben die Eigenschaft, dass alle Verbindungslinien der homologen Punkte in einem einzigen Punkte, dem Centrum der Collineation, convergiren, und dass alle Paare von homologen Richtungen in Punkten einer Geraden, der Collineationsaxe, convergiren.

Umgekehrt ist auch jeder Kegelschnitt für jeden Punkt seiner Ebene als Centrum involutorisch, und die Strahlen dieses Centrums bestimmen die homologen Punkte der involutorischen Systeme. Auch ist der Kegelschnitt für jede Gerade als Axe involutorisch, und jedes Paar Tangenten, welche in einem Punkt der Axe convergiren, bestimmen in ihren Berührungspunkten homologe Punkte dieser involutorischen Systeme.

Der Kürze halber heissen das Centrum und die Axe einer Involution des Kegelschnitts auch Pol und Polare.

Es mag noch daran erinnert werden, dass Pol und Polare durch jedes Paar homologer Punkte harmonisch getrennt werden, und dass nach diesem Gesetz ein Punkt auf der Polare liegt, wenn er mit dem Pol zwei homologe Punkte der Curve harmonisch trennt, und dass ein Punkt auf der Curve liegt, wenn er mit einem andern Punkt der Curve Pol und Polare harmonisch trennt.

§. 107. Folgende besondere Fälle der Kegelschnittinvolution sind bemerkenswerth:

a) Haben die involutorischen Punkte eines Kegelschnitts eine entgegengesetzte Lage, so gibt es zwei Hauptpunkte und die Tangenten dieser Hauptpunkte convergiren im Pol der Involution. Ein solcher Punkt, in welchem zwei Tangenten des Kegelschnitts convergiren, heisst ein äusserer Punkt des Kegelschnitts.

Umgekehrt: So oft man von einem Punkte aus zwei Tangenten an den Kegelschnitt ziehen kann, so ist die Richtung, welche die Berührungspunkte der Tangenten verbindet, die Polare jenes Punktes,

und die homologen Punkte dieser Involution bilden Reihen von entgegengesetzter Lage.

b) Haben die involutorischen Punkte eines Kegelschnitts eine einstimmige Lage, so gibt es keinen Hauptpunkt und keine Tangenten des Kegelschnitts, welche im Pol der Involution convergiren. Ein solcher Punkt, von welchem aus keine Tangenten an den Kegelschnitt gezogen werden können, heisst ein innerer Punkt des Kegelschnitts.

c) Einer unendlich entfernten Geraden in der Ebene des Kegelschnitts entspricht ein Pol, in welchem alle Sehnen, die durch denselben gehen, halbirt werden. Ein solcher Punkt heisst Mittelpunkt. Jeder Kegelschnitt hat also einen Mittelpunkt.

d) Jedem unendlich entfernten Punkte in der Ebene des Kegelschnitts entspricht eine Polare, welche durch den Mittelpunkt geht und Durchmesser heisst. Die Endtangenten jedes Durchmessers sind parallel, und alle mit diesen Tangenten parallel gezogenen Sehnen werden von jenem Durchmesser halbirt. Umgekehrt, wird jeder Kegelschnitt von zwei parallelen Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers berührt, ebenso ist auch die Halbirungslinie zweier parallelen Sehnen stets ein Durchmesser, der auch alle Sehnen halbirt und die zwei Geraden berührt, welche durch seine Endpunkte mit jenen Sehnen parallel gezogen werden.

e) Liegt der Pol auf dem Umfang des Kegelschnitts, so geht die Polare durch ihren Pol und berührt in demselben den Kegelschnitt.

Auch die Involution ist rein projektivischer Natur, und muss auch dem Kegelschnitt zukommen. Und da jeder Kegelschnitt für jeden Punkt als Centrum und für jede Gerade als Polare zu involutorischen Combinationssystemen führt, so wird man unmittelbar zu dem Schluss geführt, dass jeder Kegelschnitt einen Mittelpunkt hat, und dass jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser in dem eben angeführten Sinne ist. Der Mittelpunkt ist der Pol einer unendlich entfernten Geraden, indem die homologen Punkte dieser Involution den Pol und die Polare harmonisch trennend, nothwendig in gleicher Entfernung vom Pole liegen (§. 7). Die Polare eines unendlich entfernten Punktes ist ein Durchmesser, denn alle in jenem unendlich entfernten Punkte convergirenden und desshalb parallelen Geraden werden die Curve

des Kegelschnittes in solchen Punkten schneiden, deren jedes Paar nach §. 7 von der Polare halbirt wird. Es muss also auch die durch den Mittelpunkt gehende Sehne von dieser Polare halbirt werden, und die Polare muss also selbst ein Durchmesser sein. Zugleich bezeichnet diese Polare die Hauptpunkte der involutorischen Reihe auf der Curve, deren Tangenten ebenfalls in dem unendlich entfernten Pole convergiren, also ebenfalls parallel sind. Kurz, es wiederholt sich hier Alles, was schon bei der Involution der Kreislinie ausgesprochen wurde. Es kann übrigens die Involution des Kegelschnittes aus der Conformität desselben leicht auch direkt abgeleitet werden, ganz wie diess beim Kreise im fünften Buche geschehen, und es wird für den Anfänger eine nützliche Uebung sein, jene Beweisführung hier am Kegelschnitt zu wiederholen und den Inhalt der §§. 106 und 107 auf direktem Wege aus der Conformität des Kegelschnittes zu entwickeln.

C. Reciprocität der Kegelschnitte.

§. 108. Alle Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts setzen ein ebenes System zusammen, welches dem System ihrer Polaren auf reciproke Weise homolog ist; diess ergibt sich aus folgenden Sätzen:

a) Geht eine Gerade durch den Pol einer andern Geraden, so liegt auch auf ihr der Pol der letzteren.

b) Wenn die Punkte einer Reihe in einer Richtung liegen, so convergiren ihre Polaren alle in einem einzigen Punkt, welches der Pol jener Richtung ist, und es ist der Vielstrahl dieser Polaren der Punktreihe jener Richtung conform.

c) Convergiren mehrere Richtungen in einem Punkte, so liegen ihre Pole in einer Geraden, der Polare jenes Convergenzpunktes, und es ist die Punktreihe dieser Geraden dem Vielstrahl jener Richtungen conform.

d) Liegen die Punkte des einen Systems so, dass nicht drei in einer Richtung sich befinden, und dass sie vielmehr ein Vieleck bestimmen, so bilden ihre Polaren im zweiten System ein homologes Vielseit. Jeder Seite des Vielecks des ersten Systems entspricht ein Eck des Vielseits im zweiten System; jedem Vielstrahl des ersten Systems, welches durch die in einem Eck convergirenden Seiten gebildet wird,

entspricht eine conforme Punktreihe, welche auf der jenem Eck homologen Richtung durch die übrigen Seiten des Vielseits gebildet wird.

e) Liegen die Punkte des einen Systems auf einer Kegelschnittcurve, so berühren ihre Polaren ebenfalls einen Kegelschnitt; und umgekehrt: wenn die Richtungen des einen Systems einen Kegelschnitt berühren, so liegen ihre Polaren auf der Curve eines andern Kegelschnitts.

Auch die Eigenschaften der Reciprocität sind rein projektivischer Natur; es kann also, was in dieser Beziehung vom Kreise ausgesagt ist, unmittelbar auf den Kegelschnitt übertragen werden. Man kann übrigens auch die Reciprocität direkt aus der Conformität der Kegelschnitte ableiten. Allein man wird, wenn man dasselbe versucht, auf eine Schwierigkeit stossen, die darin besteht, die Conformität einer geraden Punktreihe und eines Vielstrahls, welche auf reciproke Weise homolog sind, nachzuweisen, indem das Mittel, welches bei der Kreislehre hiezu benützt wurde, auf einer Eigenthümlichkeit des Kreises beruhte und also hier nicht mehr anwendbar ist. Es mag daher hier gezeigt werden, wie jener Satz auch bei den Kegelschnitten auf die Conformität zurückgeführt werden kann. Es sei daher P, ABC (Fig. 76) ein in der Ebene des Kegelschnitts gegebener Vielstrahl, so kann man auch die Pole A′, B′, C′ der Strahlen PA, PB, PC auf folgende Weise construiren. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt 𝔓 auf dem Umfang des Kegelschnitts 𝔓𝔄 || PA, 𝔓𝔅 || PB, 𝔓ℭ || PC, suche die Mitten α, β, γ der Sehnen 𝔓𝔄, 𝔓𝔅, 𝔓ℭ und ziehe durch sie und den Mittelpunkt O die Richtungen OA, OB, OC, so werden dieselben durch die Pole A′, B′, C′ der Strahlen des Vielstrahls P gehen. Denn nach §. 107, d sind die Parallelen PA und 𝔓𝔄 Polstrahlen eines unendlich entfernten Punktes, dessen Polare die Richtung eines Durchmessers OA ist, welcher die Sehne 𝔓𝔄 halbirt. Es liegt also der Pol A′ der Geraden PA auf der Richtung OA (§. 108, a). Dasselbe gilt auch von den Richtungen OB, OC, und auch sie gehen durch die Pole B′, C′ der Strahlen PB und PC. Zieht man nun die Polare pp′ des Scheitels P, so liegen die Pole A′, B′, C′

der Strahlen PA, PB und PC auch auf ihr (§. 108, c). Mithin wird die Polare pp′ von den Geraden OA, OB und OC in den gesuchten Polen A′, B′ und C′ geschnitten. Um nun zu beweisen, dass Vielstrahl O, A′B′C′ $\barwedge$ P, ABC, ziehe man den Durchmesser $\mathfrak{PQ}$ und die Sehnen $\mathfrak{QA}$, $\mathfrak{QB}$, $\mathfrak{QC}$, so ist

Vielstrahl $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{ABC}$ $\barwedge$ $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{ABC}$ (§. 103, a),

und wegen des Parallelismus der Geraden PA und $\mathfrak{PA}$, PB und $\mathfrak{PB}$, PC und $\mathfrak{PC}$ ist auch

Vielstrahl $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{ABC}$ $\barwedge$ P, ABC.

Weil aber O in der Mitte von $\mathfrak{PQ}$ und α in der Mitte von $\mathfrak{PA}$ liegt, so ist OA $\|$ $\mathfrak{QA}$. Aus dem gleichen Grunde ist auch OB $\|$ $\mathfrak{QB}$, OC $\|$ $\mathfrak{QC}$, folglich ist

Vielstrahl O, ABC $\barwedge$ $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{ABC}$.

Es ist also auch Vielstrahl O, ABC $\barwedge$ P, ABC, und die Reihe A′B′C′, welche durch den Vielstrahl O, ABC auf pp′ bezeichnet wird, ist somit dem Vielstrahl P, ABC conform.

Fasst man nun alle Punkte der Ebene, in welcher ein Kegelschnitt liegt, zu einem System zusammen, so setzen die Polaren jener Punkte ein zweites System zusammen, welches jenem reciprok ist, eine gerade Punktreihe des ersten Systems und der homologe Vielstrahl des zweiten Systems, ein Vielstrahl des ersten Systems und die homologe Punktreihe des zweiten Systems sind conform. Es ist nicht unwichtig, auch die Gesetze der zusammengesetzten Figuren kennen zu lernen. Es seien daher mehrere Punkte, von denen nicht drei in einer Richtung liegen, gegeben, etwa die sechs Punkte ABCDOQ, so bestimmen dieselben ein Sechseck, das fünfzehn Seiten hat, von denen je fünf in einem Eck zusammenstossen. Jedem der sechs Ecken entspricht eine Richtung, so dass den sechs Ecken sechs Richtungen a, b, c, d, o, q entsprechen, welche ein Sechsseit mit fünfzehn Eckpunkten bilden, indem jede Richtung von den fünf anderen Richtungen in fünf Punkten geschnitten wird. Jede solche Reihe von fünf Punkten entspricht einem Vierstrahl eines Eckpunktes des ersten Systems. Zwischen dem Vieleck und seinem reciproken Vielseit herrscht also das Gesetz, dass die Punktreihe einer Seite in dem letz-

teren dem Vielstrahl des homologen Eckes in dem ersteren conform ist.

Setzt man nun aber voraus, dass die sechs Punkte A, B, C, D, O, Q so liegen, dass der Vielstrahl O, ABCD $\overline{\wedge}$ Q, ABCD, so weiss man, dass diese sechs Punkte auf einer Curve des zweiten Grades liegen. Weil nun auch die homologe Richtung o, q von den vier übrigen Richtungen in solchen Punkten a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' geschnitten werden, welche den Vielstrahlen O und Q beziehungsweise conform sind, so müssen auch diese zwei Reihen unter einander conform sein. Dann berühren aber auch sie eine Curve zweiter Ordnung (§. 103, d). Allgemein kann man also sagen, wenn man in dem einen System eine Reihe von Punkten nimmt, welche auf einer Curve zweiter Ordnung liegen, so berühren die Polaren jener Punkte ebenfalls eine Curve zweiter Ordnung; und umgekehrt, wenn mehrere Richtungen des einen Systems eine Curve zweiter Ordnung berühren, so liegen ihre Pole ebenfalls auf einer Curve zweiter Ordnung.

Nimmt man die Punkte auf dem Umfang des gegebenen Kegelschnitts, so berühren auch die Polaren derselben eben diesen Kegelschnitt (§. 107, e), und das inbeschriebene Vieleck ist dem Vielseit homolog, welches durch die Tangenten seiner Eckpunkte gebildet wird. Die Sätze 104, a und b erscheinen von diesem Standpunkte aus in einem besondern Lichte; es ist nämlich der eine nur die reciproke Form des andern. Ueberhaupt verleiht die Reciprocität der Kegelschnitte der ganzen Lehre von dem Kegelschnitte eine solche Dualität, dass jede Eigenschaft noch eine zweite zur Seite hat, welche durch das Gesetz der Reciprocität sogleich aus der ersten hervorgeht.

D. Polarität der Kegelschnitte.

§. 109. Die Reciprocität der Kegelschnitte ist involutorisch, die zwei reciproken Systeme eines Kegelschnitts bilden daher ein Polarsystem. Zwei Punkte eines Polarsystems heissen conjugirt, wenn jeder derselben auf der Polare des andern liegt; zwei Richtungen heissen conjugirt, wenn auf jeder derselben der Pol der andern liegt.

a) Jeder Punkt ist jedem Punkt seiner Polaren, und jede Gerade ist jeder Geraden, die durch ihren Pol geht, conjugirt.

b) Ein Punkt auf dem Umfang ist allen Punkten der durch ihn gehenden Tangente, und also auch sich selbst conjugirt.

c) Jede Tangente des Kegelschnitts ist allen Richtungen, welche durch ihren Berührungspunkt gehen, und also auch sich selbst, conjugirt.

d) Wenn zwei Punkte einem dritten conjugirt sind, so ist dieser der Pol der Geraden, der durch jene Punkte geht, und wenn zwei Richtungen einer dritten conjugirt sind, so ist diese die Polare des durch jene bestimmten Punktes.

e) Wenn von drei Punkten jeder dem andern conjugirt ist, so ist auch jeder der Pol der durch die zwei anderen bestimmten Geraden, und wenn von drei Geraden jede der anderen conjugirt ist, so ist jede auch die Polare des durch die zwei anderen bestimmten Punktes. Ein von solchen drei Punkten und solchen drei Geraden gebildetes Dreieck heisst Polardreieck.

f) In jedem, in einen Kegelschnitt inbeschriebenen vollständigen Viereck bilden die drei Convergenzpunkte der Gegenseiten ein Polardreieck, und ebenso bilden in jedem umbeschriebenen vollständigen Vierseit die drei Diagonalen ein Polardreieck.

§. 110. Zwischen zwei auseinander liegenden einförmigen Grundgebilden, deren Elemente einander paarweise conjugirt sind, finden folgende Beziehungen Statt;

a) Zwei Vielstrahlen, deren Strahlen einander paarweise conjugirt sind, sind conform und die Convergenzpunkte ihrer homologen Strahlen liegen auf dem Umfang eines Kegelschnittes, oder sie liegen in einer geraden Richtung.

b) Zwei Punktreihen verschiedener Richtung, deren Punkte einander paarweise conjugirt sind, sind conform und die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte berühren einen Kegelschnitt oder sie convergiren in einem Punkt.

§. 111. Zwei auf einander liegende Grundgebilde, deren Elemente paarweise conjugirt sind, haben folgende Beziehung zu einander:

Zwei concentrische Vielstrahlen, in welchen die Strahlen des einen Vielstrahls den Strahlen des andern conjugirt sind, und ebenso auch zwei in einer Richtung vereinigte Punktreihen, in welchen die Punkte der einen Reihe den Punkten der andern Reihe conjugirt sind, bilden eine Involution. Hierbei bemerkt man noch folgende Unterschiede:

a) Die in einem innern Punkte eines Kegelschnitts conjugirten Strahlen bilden eine Involution einstimmiger Lage ohne Hauptpunkte. Die in einem äusseren Punkte des Kegelschnitts conjugirten Strahlen bilden eine Involution entgegengesetzter Lage mit zwei Hauptstrahlen, welche den Kegelschnitt berühren.

b) Die conjugirten Punkte einer ausserhalb des Kegelschnitts liegenden Geraden bilden eine Involution einstimmiger Lage ohne Hauptpunkte. Die conjugirten Punkte einer Sekante des Kegelschnitts bilden eine Involution entgegengesetzter Lage mit zwei Hauptpunkten, welche auf dem Umfang des Kegelschnitts liegen.

§. 112. Die Polarität des Mittelpunktes und des Durchmessers ist durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet:

a) Jede Sehne ist dem Durchmesser, welcher dieselbe halbirt und jede Tangente dem Durchmesser, welcher an ihren Berührungspunkt gezogen ist, conjugirt; und umgekehrt: jeder Durchmesser ist allen Sehnen, welche er halbirt und seinen Endtangenten conjugirt, und diese dem Durchmesser conjugirten Richtungen sind alle einander parallel.

b) Jeder Halbmesser, d. h. die Strecke, welche den Mittelpunkt mit einem Punkt des Umfanges verbindet, ist das geometrische Mittel der zwei Abschnitte, welche zwischen dem Mittelpunkt und zwei conjugirten Punkten seiner Richtung liegen.

c) Im Kreise steht jedes Paar conjugirter Durchmesser senkrecht auf einander, und umgekehrt: so oft in einem Kegelschnitt zwei Paare conjugirter Durchmesser senkrecht auf einander stehen, so ist auch jedes andere Paar conjugirter Durchmesser senkrecht auf einander und der Kegelschnitt ist ein Kreis.

d) In jedem Kegelschnitt gibt es immer ein Paar conjugirter Durchmesser, welche senkrecht auf einander stehen, wenn aber der Kegelschnitt kein Kreis ist, so gibt es nur ein einziges Paar solcher Durchmesser. Die zwei conjugirten Durchmesser, welche senkrecht auf einander stehen, heissen Axen und theilen den Kegelschnitt in vier congruente Quadranten.

§. 113. Die Polarität der Brennpunkte hat folgende Eigenthümlichkeiten:

a) Die Polare eines Brennpunktes fällt mit der zu diesem Brennpunkt gehörenden Direktrize zusammen. Der Pol der Direktrize liegt im zugehörigen Brennpunkt.



b) Die zwei Endtangenten eines jeden Parameters convergiren in einem Punkte der Direktrize, und umgekehrt: wenn man von einem Punkte der Direktrize aus Tangenten an den Kegelschnitt zieht, so geht ihre Berührungssehne durch den zugehörigen Brennpunkt.

c) Wenn man von einem Punkt der Direktrize aus eine Gerade durch den zugehörigen Brennpunkt und zwei Tangenten an den Kegelschnitt zieht, so bilden diese vier Richtungen einen harmonischen Vierstrahl.

Dass auch die Polarität zu den projektivischen Eigenschaften gehört, folgt unmittelbar aus ihrem Begriff, und es kann daher Alles, was allgemeiner Art von dem Kreise in dieser Beziehung ausgesprochen wurde, unmittelbar auch auf alle Kegelschnitte ausgedehnt werden. Uebrigens kann auch mit Leichtigkeit und ganz auf demselben Wege, wie diess beim Kreise geschehen, die Polarität der Kegelschnitte aus den vorausgehenden Abschnitten direkt entwickelt werden; ein Geschäft, das dem Leser überlassen werden kann. Dagegen schliessen die §§. 110, 112 und 113 Manches ein, was den Kegelschnitten in ihrem Unterschiede vom Kreise zukommt, und diess bedarf also hier noch einer Erläuterung.

Denkt man sich also in Fig. 76 noch einen Vielstrahl R, dessen Strahlen den Strahlen des Vielstrahls P einzeln conjugirt sind, so müssen die Strahlen des Vielstrahls R durch die Pole A′, B′, C′ der Strahlen des Vielstrahls P gehen (§. 109, a). Nun ist aber die Reihe A′B′C′ dem Vielstrahl P, ABC conform (§. 108, c). Weil nun auch die Strahlen des Vielstrahls R durch die Punkte A′, B′, C′ gehen, so ist auch er mit der Reihe A′B′C′ und also auch dem Vielstrahl P, ABC conform. Die homologen Strahlen dieser zwei conformen Vielstrahlen P und R werden also entweder in Punkten einer Curve der zweiten Ordnung oder in einer Geraden convergiren. Ebenso behandelt man auch die Punkte zweier Richjungen, welche einander paarweise conjugirt sind.

Diese Conformität zweier Vielstrahlen, deren Strahlen conjugirt sind, hört nicht auf, wenn sie mit ihren Scheiteln vereinigt sind. Sind nämlich die homologen Strahlen zweier

concentrischen Vielstrahlen P, ABC und P, A′B′C′ conjugirt, so setzen sie einen Vielstrahl P, ABCA′B′C′ zusammen, in welchem die Pole der Strahlen PA, PB, PC, PA′, PB′, PC′ beziehlich auf den Strahlen PA′, PB′, PC′, PA, PB, PC liegen, es ist also Vielstrahl P, ABCA′B′C′ $\barwedge$ P, A′B′C′ABC, d. h. der Vielstrahl P, ABCA′B′C′ ist involutorisch. Dasselbe wiederholt sich bei den conjugirten Punkten einer Richtung.

Das, was den Kreis von den anderen Kegelschnitten unterscheidet, ist das Verhältniss des Mittelpunkts zu den Brennpunkten. Es wird im folgenden Buch nachgewiesen werden, dass wirklich jeder Kegelschnitt zwei Brennpunkte hat, so dass also das, was im vorausgehenden Buch über die Kegelschnitte gesagt ist, von ganz allgemeiner Geltung ist. Um das Gleichartige nicht trennen zu müssen, möge daher hier schon auf diese Eigenschaften aufmerksam gemacht werden. Betrachtet man nun einen Kegelschnitt, welcher aus seinen zwei Leitkreisen entwickelt ist, und erinnert sich, dass jeder Aehnlichkeitsstrahl $C'\mathfrak{C}'$ (Fig. 59) der Leitkreise einem Durchmesser $C\mathfrak{C}$ der Kegelschnitte homolog ist, der mit ihm in einem Punkt γ' der Collineationsaxe convergirt (§. 89, d), und dass die Endestangenten $C\gamma$ und $C\gamma'$ auf dem Aehnlichkeitsstrahl $C'\mathfrak{C}'$ senkrecht stehen (§. 89, c) und endlich dass der Durchmesser, der mit diesen Endestangenten parallel ist, dem Durchmesser $C\mathfrak{C}$ conjugirt ist (§. 112, a), so wird man den Schluss ziehen, dass zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts, der kein Kreis ist, im Allgemeinen schief aufeinander stehen; weil von zwei convergirenden Linien nur die eine auf einer dritten senkrecht stehen kann. Eine Ausnahme findet nur für den Durchmesser $B\mathfrak{B}$ statt, welcher mit der Direktrize parallel ist, weil dieser allein mit dem homologen Aehnlichkeitsstrahl parallel ist. Dieser Durchmesser wird also auf seiner Tangente und also auch auf seinem conjugirten Durchmesser $A\mathfrak{A}$ senkrecht stehen, weil zwei Parallelen zugleich auf einer dritten senkrecht stehen. Stehen aber diese Durchmesser $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$, welche man Axen heisst, senkrecht aufeinander, so folgt aus §. 112, a, dass sie den Kegelschnitt

in zwei congruente Quadranten abtheilen. Auf jedem Durchmesser, welcher zwei Punkte des Umfanges verbindet, bilden die conjugirten Punkte zwei involutorische Reihen entgegengesetzter Lage, in welchen die Endpunkte des Durchmessers als Hauptpunkte figuriren (§. 111, b). Jedes Paar conjugirter Punkte theilt also den Durchmesser harmonisch (§. 24), und der Halbmesser ist also das geometrische Mittel der zwei Abschnitte, die zwischen ihm und zwei conjugirten Punkten liegen (§. 8, a).

Nun hat aber nach §. 99 auch die Direktrize eine solche Lage, dass ihr Schnittpunkt α mit der Axe und der zugehörige Brennpunkt F'' die Axe A𝔄 harmonisch theilen (Fig. 60). Die Punkte α und F'' sind also zwei conjugirte Punkte der Axe A𝔄, und wenn man durch α und F'' zwei Gerade zieht, so sind auch sie conjugirt; stehen diese Geraden zugleich senkrecht auf der Axe A𝔄, so sind auch sie conjugirt (§. 112, d) und bilden ein Polardreieck; da nun aber die Direktrize senkrecht auf A𝔄 ist, so ist sie eine Seite dieses Polardreiecks und also die Polare des Punktes F'' (§. 109, e). Weil aber F'' der Pol der Direktrize ist, so wird auch die Polare jedes Punktes der Direktrize durch den Brennpunkt gehen, und umgekehrt wird der Pol jeder durch F'' gehenden Geraden auf der Direktrize liegen (§. 109, a). Es müssen also auch die Endestangenten jedes Parameters in einem Punkt γ der Direktrize convergiren (§. 107, a). Zugleich trennen die Endpunkte C und ℭ des Parameters den Pol F'' und die Polare $\alpha\gamma$ harmonisch (§. 106), es bilden also auch die Linien γC, γF'', γℭ und γ𝔤' einen harmonischen Vierstrahl.

E. Die Transversale des Kegelschnitts.

§. 114. Die Conformitätsgesetze führen noch zu folgenden Sätzen über die Transversalen:

a) Die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks theilen jede Transversale involutorisch, so dass die drei in einem Eck convergirenden Seiten die Punkte der einen Reihe, und ihre Gegenseiten die homologen Punkte der andern Reihe bestimmen.

b) Jede Transversale wird von der Curve eines Kegelschnitts in solchen Punkten geschnitten, die als homologe Punkte derjenigen Involution figuriren, welche durch irgend ein inbeschriebenes Viereck auf der Transversalen bestimmt wird.

c) Wenn eine Gerade einen Kegelschnitt berührt, so ist der Berührungspunkt ein Hauptpunkt der Involution, welche auf der Tangente durch die Seitenrichtungen irgend eines inbeschriebenen Vierecks bestimmt wird.

d) Jeder Sechsstrahl, dessen Seiten durch die Ecken eines vollständigen Vierseits gehen, ist involutorisch, und zwar entsprechen die Strahlen, welche durch die drei in einer Richtung liegenden Ecken gehen, den Strahlen ihrer Gegenecken.

e) Die Tangenten, welche man von einem Punkte aus nach einem Kegelschnitt zieht, sind homologe Strahlen jedes involutorischen Vielstrahls, dessen Strahlen durch die Ecken eines umbeschriebenen Vierseits bestimmt werden.

f) Wenn ein Punkt auf der Curve liegt, so ist die Tangente dieses Punktes ein Hauptstrahl der Involution, welche entsteht, wenn man von jenem Punkt aus nach den sechs Ecken eines umbeschriebenen Vierseits gerade Linien zieht.

Die Transversale MN (Fig. 124) wird von den in A convergirenden Seiten des Vierecks ABCD in den Punkten α', β', γ' und von den Richtungen der Gegenseiten in den Punkten α, β, γ geschnitten. Nun liegen gegen die Richtung BD perspektivisch und sind also auch conform die Vielstrahlen

$$A, BCD\beta \barwedge C, BAD\beta$$

folglich $\gamma'\beta'\alpha'\beta \barwedge \alpha\beta'\gamma\beta$ (§. 30).

$\alpha\beta'\gamma\beta \barwedge \gamma\beta\alpha\beta'$ (Erläuterungen zu §. 17),

folglich $\gamma'\beta'\alpha'\beta \barwedge \gamma\beta\alpha\beta'$

Es ist also die Reihe $\gamma\beta\alpha\gamma'\beta'\alpha'$ involutorisch (§. 21).

Ist nun um das Viereck ABCD irgend ein Kegelschnitt beschrieben, welcher die Richtung der Transversalen in den Punkten M und M' schneidet, so ist auch nach §. 103, a Vielstrahl B, MM'DC $\barwedge$ A, MM'DC, also MM'$\beta\alpha \barwedge$ MM'$\alpha'\beta'$, aber nach den Erläuterungen von §. 17 auch MM'$\alpha'\beta' \barwedge$ M'M$\beta'\alpha'$, mithin auch MM$\beta\alpha \barwedge$ M'M$\beta'\alpha'$.

Es ist demnach auch die Reihe $M\alpha\beta M'\alpha'\beta'$ involutorisch (§. 21), und weil die Involution schon durch die Reihe $\alpha\beta\alpha'\beta'$ bestimmt ist, so sieht man, dass die Punkte M und M' der Curve homologe Punkte der Involution sind, welche durch die Seiten irgend eines inbeschriebenen Vierecks bestimmt sind. Berührt die Transversale den Kegelschnitt, so fallen die zwei Punkte M und M' in einem Ort zusammen, und der Berührungspunkt ist also ein Hauptpunkt der Involution.

Die folgenden drei Sätze gehen aus dem Vorausgehenden mittelst des Reciprocitätsgesetzes §. 108 unmittelbar hervor.

Achtes Buch.

Symbolische Geometrie.

A. Imaginäre Punkte und Richtungen ebener Systeme.

§. 115. Die einstimmige involutorische Punktreihe hat keine reellen, wohl aber zwei imaginäre Hauptpunkte, welche durch zwei Paare homologer Punkte vollkommen bestimmt sind. Ebenso liefert auch der einstimmige involutorische Vielstrahl in seinen Hauptstrahlen zwei imaginäre Strahlen, die durch zwei Paare seiner homologen Strahlen vollkommen bestimmt sind. Ein ebenes System kann eben so viele Paare von imaginären Punkten und imaginären Strahlen enthalten, als es einförmige Grundgebilde einschliesst, ja es können auf jeder Richtung beliebig viele Paare imaginärer Punkte, und in jedem Vielstrahl beliebig viele Paare imaginärer Strahlen liegen, wenn in jedem dieser Gebilde eben so viele einstimmige Involutionen vereinigt sind.

Aus dem Begriff dieser imaginären Elemente ergeben sich folgende Regeln:

a) Die imaginären Punkte sowohl als die imaginären Richtungen eines ebenen Systems gehören paarweise zusammen.

b) Jedes Paar zusammengehöriger imaginärer Punkte liegt auf einer reellen Richtung, aus welcher es durch Involution hervorgegangen ist. Jede andere Richtung, welche blos durch einen imaginären Punkt eines Paares geht, ist selbst imaginär; auch muss die Richtung, welche zwei nicht zusammen gehörige imaginäre Punkte verbindet, als imaginär betrachtet werden.

c) Jedes Paar zusammen gehöriger imaginärer Richtungen convergirt in einem reellen Punkt, dem Scheitel des Vielstrahls, aus welchem

es durch Involution hervorgegangen ist. Jeder andere Punkt, welcher auf einer dieser imaginären Richtungen liegt, ist selbst imaginär; auch muss der Convergenzpunkt zweier nicht zusammen gehöriger imaginärer Richtungen als imaginär betrachtet werden.

Sind auf einer Richtung zwei Paare homologer Punkte A, A', B, B' gegeben, so ist die ganze Involution bestimmt, und es kann zu jedem weitern Punkt sein homologer Punkt und demnach auch der Centralpunkt Q der Involution gefunden werden (§. 22). Ist dieser gefunden, so lehrt die Regel (§. 20), wie auch die Hauptpunkte der Involution bestimmt werden. Wenn man nämlich das Produkt der Abschnitte, in welche die Entfernung AA' durch den Centralpunkt Q getheilt wird mit p, und die Entfernungen der Hauptpunkte von Q mit a und a' bezeichnet, so folgt aus den Erläuterungen des §. 20, dass
für die entgegengesetzte Involution $a = +\sqrt{p}$, $a' = -\sqrt{p}$,
für die einstimmige Involution $a = +\sqrt{-p}$, $a' = -\sqrt{-p}$.

Unter allen den reellen Punkten, welche in gewissen Entfernungen von dem Centralpunkt Q abstehen, ist also keiner, der ein Hauptpunkt der einstimmigen Involution wäre; demungeachtet sind aber diese Hauptpunkte doch auch nicht überhaupt bloss nicht wirklich und unmöglich, so dass man nichts von ihnen aussagen könnte, sondern sie sind trotz ihrer Unmöglichkeit bestimmt, indem ihre Entfernung vom Centralpunkt durch einen Ausdruck dargestellt ist, der ganz den Charakter einer bestimmten Grösse hat, wodurch er von allen anderen unterschieden werden kann. Wegen dieser Bestimmtheit, welche solchen nicht reellen Punkten zukommt, abstrahirt man von ihrem Mangel an Realität und gestattet ihnen, unter dem Namen von imaginären Punkten, Bürgerrecht. Jede involutorische Reihe einer Richtung hat also zwei Hauptpunkte: die Hauptpunkte der entgegengesetzten Involution sind reelle Punkte, die der einstimmigen Involution sind imaginär; in beiden Fällen liegen sie symmetrisch auf beiden Seiten des Centralpunkts Q, und für den Fall, dass $p = 0$ wird, fallen sie in einem Punkt, in dem Centralpunkt selbst, aufeinander, und sind in diesem Fall also jeden-

falls reell. Die Hauptpunkte der Involution, seien sie reell oder imaginär, sind bestimmt, sobald zwei Paare von homologen Punkten jener Involution gegeben sind. Trotz ihres Mangels an Realität kann man doch von ihrer Lage reden; denn einmal liegen sie auf der Richtung der involutorischen Reihe der sie angehören, sodann weiss man, dass sie mit keinem reellen Punkt dieser Reihe zusammen fallen; wenn ferner in derselben Richtung zwei oder mehrere einstimmige involutorische Reihen vereinigt sind, so muss man schliessen, dass die imaginären Hauptpunkte derselben aufeinander fallen, wenn diese involutorischen Reihen mit allen ihren homologen Punkten aufeinander fallen, was allemal geschieht, wenn sie es mit zwei Paaren homologer Punkte thun. Im letztern Falle haben die imaginären Hauptpunkte beider Reihen zugleich auch dieselbe Formel $\pm\sqrt{-p}$. Fallen aber zwei in einer Richtung vereinigte involutorische Reihen nicht mit zwei Paaren ihrer homologen Punkte und also im Allgemeinen überhaupt nicht aufeinander, so liegen auch ihre imaginären Hauptpunkte ausser einander und haben auch verschiedene Abstände $\pm\sqrt{-p}$ und $\pm\sqrt{-p'}$ von ihrem Centralpunkt.

Der einstimmige involutorische Vielstrahl, welcher sich aus der einstimmigen involutorischen Reihe entwickelt, hat keine reellen Hauptstrahlen, wenn diese keine reellen Hauptpunkte hat; aus demselben Grunde, wie oben, schreibt man aber auch seinen Hauptstrahlen wegen der Bestimmtheit, die ihnen so gut als den reellen Strahlen zukommt, eine Existenz, wenn schon blos eine imaginäre, zu. Trotz dem, dass ihnen die Realität abgeht, kann man auch von ihrer Lage reden; so weiss man, dass die zwei imaginären Hauptstrahlen einer Involution wie die reellen Strahlen, zu denen sie gehören, in einem reellen Punkte, dem Scheitel ihres Vielstrahls, convergiren; man weiss, dass aber auf keinem solchen Strahl ein anderer reeller Punkt liegen kann, weil sonst der imaginäre Strahl selbst reell wäre, da durch zwei reelle Punkte nur eine reelle Richtung geht etc.

Wenn man es mit den imaginären Punkten eines ganzen

ebenen Systems zu thun hat, so hat man wohl auf die Merkmale derselben, welche ihnen ihrem Begriffe gemäss zukommen, zu achten. Also vor Allem darauf, dass die imaginären Punkte paarweise zusammen gehören, und dass die Punkte jedes Paares auf einer reellen Richtung liegen, sodann dass jede Gerade einer andern Richtung, welche blos durch einen von zwei zusammen gehörigen Punkten geht, selbst imaginär ist; denn wenn sie reell wäre, so würde sie ja die erste Richtung in einem reellen Punkt schneiden, was gegen die Annahme ist. Aus dem gleichen Grunde kann aber auch eine Gerade, welche zwei nicht zusammen gehörige Punkte zweier verschiedenen Punktreihen verbindet, nicht reell sein. Sobald man aber durch zwei zusammen gehörige imaginäre Punkte einer Reihe zwei Richtungen zieht, die also ebenfalls imaginär sind, so convergiren sie stets in einem reellen Punkt, so dass also ihr Convergenzpunkt reell ist und gezeichnet werden kann. Diess sieht man daraus, dass jeder ausserhalb der involutorischen Punktreihe liegende Punkt der Scheitel eines mit jener Reihe perspektivischen Vielstrahls sein kann, dessen imaginäre Hauptstrahlen durch die imaginären Punkte jener Reihe gehen. Zwei nicht zusammen gehörige imaginäre Richtungen können sich aber nicht in einem reellen Punkte schneiden.

Die Beachtung der imaginären Punkte und Richtungen ist für die Geometrie von hohem Werthe, weil sie eine Allgemeinheit der Betrachtung und der Ausdrucksweise gewährt, die sonst vergebens angestrebt wird. Diess werden schon die folgenden Abschnitte, noch mehr aber das folgende Buch hinlänglich zeigen.

B. Imaginäre Punkte und Tangenten der Kegelschnitte.

§. 116. Die involutorische Punktreihe auf dem Umfang eines Kegelschnitts führt zu reellen und imaginären Punkten auf demselben, und die Tangenten derselben zu imaginären Tangenten. Man bemerkt folgende Eigenschaften an ihnen:

a) Jede Gerade schneidet jede Kegelschnittscurve, mit der sie in einer Ebene liegt, in zwei Punkten, und heisst daher Sekante. Man

unterscheidet aber die eigentliche Sekante, welche die Curve in zwei reellen Punkten schneidet, die uneigentliche Sekante, welche die Curve in zwei zusammen gehörigen imaginären Punkten schneidet, und die reelle Tangente, welche durch zwei in einem Ort zusammen fallende reelle oder imaginäre Punkte geht.

b) Die Schnittpunkte jeder Sekante mit der Curve sind die Hauptpunkte der involutorischen Reihe, welche durch die conjugirten Punkte ihrer Richtung gebildet wird, sie sind also durch zwei Paare solcher conjugirter Punkte bestimmt.

c) Von jedem Punkt aus kann man an einen Kegelschnitt, der mit ihm in einer Ebene liegt, zwei Tangenten ziehen. Man unterscheidet aber den innern Punkt, welcher zwei reelle Tangenten gestattet, den äussern Punkt, in welchem zwei zusammen gehörige imaginäre Tangenten convergiren, und den Punkt auf dem Umfang, in welchem zwei reelle Tangenten, oder auch zwei zusammen gehörige imaginäre Tangenten in einer Richtung zusammen fallen.

d) Die Tangenten, welche man von irgend einem Punkte aus an den Kegelschnitt zieht, sind die zwei Hauptstrahlen der Involution, welche die in ihm conjugirten Richtungen bilden. Diese Tangenten sind also durch zwei Paare solcher conjugirter Richtungen gegeben.

e) Durch jede zwei reelle Punkte der Curve, welche nicht coincidiren, geht also eine eigentliche Sekante, durch jede zwei zusammen gehörige imaginäre Punkte, welche nicht coincidiren, eine uneigentliche Sekante; durch jede zwei reelle Punkte, und durch jede zwei zusammen gehörige imaginäre Punkte geht, wenn sie coincidiren, eine reelle Tangente des Kegelschnitts.

f) Die Tangenten jedes Paares zweier reellen auseinander liegender Punkte convergiren in einem äussern Punkt, die Tangenten jeder zwei auseinander liegenden, zusammen gehörigen imaginären Punkte convergiren in einem innern Punkte, und die Tangenten zweier coincidirenden Punkte in einem Punkt der Curve selbst.

Dass auch auf der Curve eines Kegelschnitts reelle und imaginäre Punkte liegen, und dass durch dieselben reelle und imaginäre Richtungen gehen, das folgt im Allgemeinen schon aus der involutorischen Punktreihe und der involutorischen Tangentenschaar, welche, je nachdem sie entgegengesetzte oder einstimmige Aufeinanderfolge haben, zu reellen oder nicht reellen Elementen führen. Man kann übrigens zeigen, dass

diese reellen und nicht reellen Elemente mit den reellen und imaginären Punkten und Richtungen der einförmigen Grundgebilde zusammen fallen, und damit ist die Identität mit den imaginären Elementen des vorausgehenden Abschnitts erwiesen. Befindet sich nämlich eine Gerade MN (Fig. 108) und ein Kegelschnitt in einer Ebene, so bestimmen sie zwei involutorische Systeme, welche die Gerade MN zur Axe und ihren Pol O zum Centrum haben, und jeder Strahl des Centrums O bezeichnet auf dem Umfang des Kegelschnitts zwei homologe Punkte dieser Systeme. Jeder Vielstrahl nun, welcher mit seinem Scheitel in irgend einem Punkt A des Umfangs liegt, und dessen Strahlen durch die involutorischen Punkte B, B', C, C' etc. gehen, ist ebenfalls involutorisch (§. 105), und bestimmt auch auf der Axe eine involutorische Reihe $\beta\beta'\gamma\gamma'$, so dass die involutorischen Punkte der Kegelschnittcurve und die ihnen entsprechenden Punkte der involutorischen Reihe der Axe paarweise auf denselben Strahlen des involutorischen Vielstrahls A liegen. Jedes Paar homologer Punkte der Involution der Axe, sind conjugirt. Um diess zu sehen, ziehe man von dem Punkt A' aus, welcher auf der Curve dem Punkte A homolog ist, die Richtungen A'B und A'B', so convergiren die Richtungen AB' und A'B, so wie AB und A'B' in den Punkten β' und β der Axe (§. 106), und weil ABB'A' ein inbeschriebenes Viereck ist, welches die Eigenschaft hat, dass die Convergenzpunkte der Gegenseiten $\mathfrak{D}'$, β, β' ein Polardreieck bilden, so sind die Punkte β und β' conjugirt (§. 109, e, f). Zieht man also noch vom Centrum O aus nach den Punkten β, β', γ, γ' Strahlen, so bestimmt der involutorische Vielstrahl A zugleich die involutorische Reihe B C B' C' auf der Curve, die involutorische Reihe $\beta\gamma\beta'\gamma'$ auf der Axenrichtung und den involutorischen Vielstrahl O, $\beta\gamma\beta'\gamma'$ des Centrums. Die Hauptstrahlen des Vielstrahls O bezeichnen also zugleich auf der Axe und auf der Curve die Hauptpunkte, und die Hauptpunkte der zwei letzteren müssen an denselben zwei Orten M und N zusammen fallen, und durch die gleichen Punkte müssen auch die Hauptstrahlen des mit A perspektivischen Vielstrahls

O gehen, und überdiess werden die Hauptstrahlen des Vielstrahls O die Curve berühren, weil an dem Ort, den der Hauptstrahl mit der Curve gemein hat, die zwei Punkte der Curve, durch welche er geht, auf einander fallen. Ist nun die Involution des bestimmenden Vielstrahls A von entgegengesetzter Lage, so sind es auch alle übrigen abhängigen Involutionen; die Hauptstrahlen des Vierstrahls A sind reell und bezeichnen die reellen Hauptpunkte M und N, in welchen die Hauptpunkte der Curve und der Axe zusammen fallen, und in welchen die Curve von den Hauptstrahlen des Vielstrahls O berührt wird; ist aber die Involution des Vielstrahls A von einstimmiger Lage, so sind die Hauptstrahlen desselben imaginär und bezeichnen also auch auf der Axe und der Curve zwei imaginäre gemeinschaftliche Hauptpunkte (§. 115, c), in welchen auch nur von den imaginären Hauptstrahlen des Centrums O eine Berührung vollzogen werden kann. Die Axe MN des letztern Falles, welche mit der Curve nur zwei imaginäre Punkte gemeinschaftlich hat, heisst eine uneigentliche Sekante, und der Punkt O, in welchem nur zwei imaginäre Tangenten der Curve convergiren können, heisst ein innerer Punkt. Es können auch die zwei Hauptstrahlen des Vielstrahls O in einer Richtung zusammen fallen, dann berührt die Axe die Curve, weil sie nur diese Punkte mit ihr gemein hat, und es fallen auch die zwei Hauptstrahlen in eine Richtung zusammen, und der Punkt O muss auf der Curve selbst und zwar in dem Berührungspunkt liegen.

C. In- und umbeschriebene Vielecke.

§. 117. Durch die imaginären Punkte und Tangenten einer Curve erleidet auch der Begriff der in- und umbeschriebenen Vielecke eine Erweiterung.

a) Drei reelle Punkte der Curve bestimmen ein eigentliches inbeschriebenes Dreieck, das drei reelle Seiten hat. Ein reeller Punkt und ein Paar imaginärer Punkte bestimmen ein uneigentliches inbeschriebenes Dreieck, welches eine reelle und zwei imaginäre Seiten hat.

b) Vier reelle Punkte der Curve bestimmen ein eigentliches in-

beschriebenes Viereck, das sechs reelle Seiten hat. Ein Paar reeller und ein Paar imaginärer Punkte, so wie auch zwei Paare imaginärer Punkte bestimmen ein uneigentliches inbeschriebenes Viereck, das zwei reelle und vier imaginäre Seiten hat.

c) Fünf reelle Punkte der Curve bestimmen ein eigentliches inbeschriebenes Fünfeck, das zehn reelle Seiten hat. Ein Paar imaginärer Punkte und drei reelle Punkte der Curve bestimmen ein uneigentliches inbeschriebenes Fünfeck, das vier reelle und sechs imaginäre Seiten hat. Zwei Paare imaginärer Punkte und ein reeller Punkt bestimmen ein uneigentliches inbeschriebenes Fünfeck, das zwei reelle und acht imaginäre Seiten hat.

d) Drei reelle Tangenten bestimmen ein eigentliches umbeschriebenes Dreiseit, das drei reelle Ecken hat. Ein Paar imaginärer Tangenten und eine reelle Tangente einer Curve bestimmen ein uneigentliches umbeschriebenes Dreiseit, das ein reelles Eck und zwei imaginäre Ecken hat.

e) Vier reelle Tangenten einer Curve bestimmen ein eigentliches umbeschriebenes Vierseit, das sechs reelle Ecken hat. Ein Paar reeller und ein Paar imaginärer Tangenten, so wie auch zwei Paare imaginärer Tangenten bestimmen ein uneigentliches umbeschriebenes Vierseit, das zwei reelle und zwei imaginäre Ecken hat.

f) Fünf reelle Tangenten bestimmen ein eigentliches umbeschriebenes Fünfseit, das zehn reelle Ecken hat. Ein Paar imaginärer und drei reelle Tangenten bestimmen ein uneigentliches umbeschriebenes Fünfseit, das vier reelle und sechs imaginäre Ecken hat. Zwei Paare imaginärer Tangenten und eine reelle Tangente bestimmen ein uneigentliches umbeschriebenes Fünfseit, das zwei reelle und acht imaginäre Ecken hat.

§. 118. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte seines Umfanges, auch wenn ein oder zwei Paare von imaginären Punkten darunter sind, und ebenso durch fünf Tangenten, auch wenn ein oder zwei Paare imaginärer Tangenten darunter sind, vollkommen bestimmt. Um ein eigentliches und um ein uneigentliches gegebenes Fünfeck, in ein eigentliches und in ein uneigentliches gegebenes Fünfseit kann also nur ein einziger Kegelschnitt beschrieben werden. Zur Construction solcher Kegelschnitte sind folgende Sätze von Wichtigkeit:

a) Wenn man von zwei gegebenen Punkten der Kegelschnittcurve zwei Richtungen nach einem dritten Punkt dieser Curve zieht, und die

homologen Richtungen für irgend eine Involution des Kegelschnitts aufsucht, so convergiren auch sie in einem Punkt der Curve des Kegelschnitts.

b) Wenn man auf zwei gegebenen Tangenten die Convergenzpunkte mit einer dritten Tangente bestimmt, und die homologen Punkte derselben für irgend eine Involution des Kegelschnitts aufsucht, so liegen auch sie auf einer Richtung, welche denselben Kegelschnitt berührt.

c) Wenn zwei uneigentliche Sekanten eines Kegelschnitts gegeben sind, so liegen die zwei Punkte derselben, welche den in ihrem Convergenzpunkt vereinigten Punkten conjugirt sind, auf der Geraden, welche durch die zwei Pole der uneigentlichen Sekanten geht.

d) Wenn zwei innere Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so convergiren die zwei Strahlen derselben, welche den in ihrer Verbindungslinie liegenden Richtungen conjugirt sind in einem Punkt, in welchem die Polaren jener inneren Punkte convergiren.

Der erweiterte Begriff der Sekante führt unmittelbar zu einem erweiterten Begriff der inbeschriebenen Vielecke, und ebenso führt der Begriff der äusseren und inneren Punkte als Convergenzpunkte eines Paares reeller oder imaginärer Tangenten zu einem erweiterten Begriff der umbeschriebenen Vielseite. Man wird bemerken, dass eine uneigentliche Sekante und ein reeller Punkt auf einer Kegelschnittcurve ein uneigentliches Dreieck bestimmen, das eine reelle Seite, nämlich die Richtung der uneigentlichen Sekante und zwei imaginäre Seiten, nämlich die Richtungen, welche den reellen Punkt mit den zwei Schnittpunkten der Sekante verbinden, und welche nach §. 115, b selbst imaginär sind. Ebenso wird man sehen, dass durch zwei Sekanten stets ein inbeschriebenes Viereck bestimmt wird, welches aber uneigentlich ist, sobald eine derselben uneigentlich ist (§. 116, a); ferner dass durch einen reellen Punkt und zwei eigentliche oder uneigentliche Sekanten ein inbeschriebenes Fünfeck bestimmt ist. Ebenso convergiren nach §. 116, c in jedem Punkt, sei es ein innerer oder äusserer zwei Tangenten des Kegelschnitts, es sind also durch jeden solchen Punkt, wenn der Kegelschnitt gegeben ist, auch

ein Paar reeller oder imaginärer Tangenten gegeben. Es ist also durch eine Tangente und einen Punkt in der Ebene des Kegelschnitts ein umbeschriebenes Dreieck, durch zwei Punkte ein umbeschriebenes Viereck, durch zwei Punkte und eine Tangente ein umbeschriebenes Fünfeck gegeben.

Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass auch die Sätze §. 103, b und d für diese erweiterten Begriffe noch ihre volle Gültigkeit haben, dass nämlich eine Kegelschnittcurve durch fünf Punkte auch wenn ein oder zwei Paare imaginärer Punkte darunter sind, und durch fünf Tangenten, auch wenn ein oder zwei Paare imaginärer Tangenten darunter sind, vollkommen bestimmt sind. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man die Strahlen, welche von zwei Punkten A und B (Figur 108) einer Kegelschnittcurve nach einem dritten Punkt C derselben Curve gezogen werden, und suche für irgend eine Involution ABA'B' des Kegelschnitts, welche durch das Centrum O und die Axe MN bestimmt ist, diejenigen Strahlen der involutorischen Vielstrahlen A und B, welche den Strahlen AC und BC homolog sind. Nun weiss man, dass in jedem solchen inbeschriebenen Vielstrahl, dessen Scheitel auf der Curve liegt und dessen Strahlen durch die involutorischen Punkte des Kegelschnitts gehen, eben denjenigen zwei Strahlen homolog sind, welche durch zwei homologe Punkte der Curve gehen (§. 105). Nun entspricht aber dem Punkt C der Curve nur ein einziger homologer Punkt C', es muss also auch sowohl der Strahl des Vielstrahls A, welcher mit AC homolog ist, als auch der Strahl des Vielstrahls B, welcher mit BC homolog ist, durch einen und denselben Punkt C' der Curve gehen. Durch die Involution der conjugirten Punkte der Axe MN können aber, wenn sie gegeben ist, jederzeit zu den durch die Strahlen AC und BC gegebenen Punkten γ und δ der Axe die conjugirten Punkte γ' und δ', und eben damit auch die Richtungen $A\gamma'$ und $B\delta'$, und also der Punkt C', welcher mit C homolog ist, gefunden werden. Man sieht hieraus, wie durch drei Punkte A, B, C auf einer Kegelschnittcurve, wenn noch eine Sekante und ihre reellen oder imaginären Schnittpunkt durch zwei Paare homo-

loger Punkte gegeben sind, d. h. wie durch drei reelle und ein Paar imaginärer Punkte noch ein vierter reeller Punkt bestimmt ist. Bestimmt man nun auf dieselbe Weise den Punkt A′, welcher durch die homologen Richtungen von BA und CA gefunden wird, und den Punkt B′, welcher durch die homologen Richtungen von AB und CB gefunden wird, so hat man sechs Punkte auf der Linie und man wird einsehen, dass alle Punkte der Curve bestimmt sind (§. 103, b).

Sind drei Tangenten a, b, c, *) die in drei Punkten convergiren, welche nach den gegenüber liegenden Seiten mit C, B und A bezeichnet sind, und sucht man zu dem Strahl OC des gegebenen involutorischen Vielstrahls O den homologen Strahl, welcher die Tangente C′ in dem Punkte α schneidet, ferner zu dem Strahl OA den homologen Strahl, welcher die Seite b in dem Punkt 𝔈′ schneidet, so wird auch C′𝔈′ eine Tangente der Kegelschnitte sein. Diess folgt schon nach dem Gesetz der Reciprocität der Kegelschnitte aus dem vorausgehenden Satze; und weil man auf dieselbe Weise noch zwei andere Tangenten des Kegelschnitts construiren kann, so hat man sechs Tangenten des Kegelschnitts, von denen fünf schon vollkommen bestimmt sind. Es ist also ein Kegelschnitt auch durch fünf Tangenten bestimmt, wenn ein Paar derselben imaginär und durch die Involution eines Vielstrahls O gegeben sein sollte.

Sind (Fig. 125) zwei uneigentliche Sekanten des Kegelschnitts $\alpha\alpha'$ und 𝔞𝔞′ und die Involution ihrer conjugirten Punkte durch zwei Paare von homologen Punkten $\alpha\alpha'\beta\beta'$, 𝔞𝔞′𝔟𝔟′ gegeben, wobei vorausgesetzt werden kann, dass die Punkte 𝔞′ und α' im Convergenzpunkt Q der Sekanten vereinigt seien, so wird man, gestützt auf §. 108, c schliessen, dass α'𝔞′ durch die Pole P und 𝔓 der Richtungen $\alpha\alpha'$ und 𝔞𝔞′ geht. Ist also noch ein Punkt C auf der Curve gegeben, und

*) Man wird leicht die dem Folgenden zu Grunde liegende Figur construiren.

zieht man von demselben aus Strahlen durch die Punkte der involutorischen Reihe $\alpha\alpha'\beta\beta'$, so entsteht ein involutorischer Vielstrahl C, $\alpha\alpha'\beta\beta'$. Nach der Erläuterung des §. 116 bezeichnet derselbe auch auf der Curve Punkte, welche zweien involutorischen Systemen des Kegelschnitts angehören, die die Richtung $\alpha\alpha'$ zur Axe und den Pol P derselben zum Centrum haben. Die Punkte, welche also durch ein Paar homologer Strahlen $C\alpha$ und $C\alpha'$ auf der Curve bezeichnet werden, sind selbst homologe Punkte dieser Involution des Kegelschnitts und liegen mit dem Punkt P in einer Richtung. *) Ebenso verhält sich auch der involutorische Vielstrahl C, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$. Weil nun die Richtung $\alpha'\mathfrak{a}'$ durch die Centra P und $\mathfrak{P}$ dieser zwei Involutionen des Kegelschnitts geht, so sind die Punkte, in welchen sie die Curve schneidet, dadurch ausgezeichnet, dass sie sowohl hinsichtlich der einen als auch hinsichtlich der anderen Involution homolog sind (§. 106). Ueberdiess sind die Centra P und $\mathfrak{P}$ innere Punkte des Kegelschnitts, weil sie die Pole der uneigentlichen Sekanten $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ sind, die Richtung $\alpha\alpha'$ ist also eine eigentliche Sekante und schneidet die Curve in zwei reellen Punkten M und N. Diese Punkte können leicht construirt werden, weil auch die Strahlen CM und CN sowohl in dem involutorischen Vielstrahl C, $\alpha\alpha'\beta\beta'$, als auch in dem involutorischen Vielstrahl $C\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ homolog sind. Construirt man also diese Richtungen nach Aufgabe 21, so bestimmen sie auf $\alpha'\mathfrak{a}'$ zwei reelle Punkte M und N der Curve. Es sind somit drei Punkte C, M, N der Curve bekannt, und die Curve selbst ist, weil ausserdem noch imaginäre Punktpaare gegeben sind, wie die vorausgehende Deduktion gezeigt hat, bestimmt, und kann gezeichnet werden. Ganz auf ähnliche Weise construirt man auch einen Kegelschnitt, wenn eine reelle und zwei Paare imaginärer Tangenten durch zwei Paare involutorischer Vielstahlen gegeben sind. Sind P, $\alpha\alpha'\beta\beta'$ und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ die zwei involutorischen

*) Dieser Satz ist im folgenden Abschnitt ausdrücklich angeführt und aus dem Gesetz der harmonischen Theilung direkt bewiesen (siehe §. 130, a).

Vielstrahlen, deren Hauptstrahlen die imaginären Tangenten bestimmen, und in welchen die der Scheitellinie P𝔓 homologen Strahlen in dem Punkte Q convergiren, während jene Vielstrahlen P und 𝔓 auf der gegebenen reellen Tangente CD, die involutorischen Reihen $\alpha\alpha'\beta\beta'$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ bezeichnen, so darf man nur die Punkte M und N, welche hinsichtlich beider Involutionen homolog sind, aufsuchen und mit Q verbinden, so sind die Verbindungslinien zwei weitere reelle Tangenten des Kegelschnitts.

D. Gemeinschaftliche Sekanten und Vielstrahlen.

§. 119. Auch der Begriff der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte erfordert jetzt eine Erweiterung.

a) Haben zwei Curven der zweiten Ordnung zwei Punkte mit einander gemein, so heisst die Richtung, welche durch dieselben geht, eine eigentliche oder uneigentliche gemeinschaftliche Sekante, je nachdem jene Punkte reell oder zusammen gehörig imaginär sind. Man erkennt übrigens die eine wie die andere dieser Sekanten daran, dass jede zwei Punkte ihrer Richtung, welche in Beziehung auf die eine Curve conjugirt sind, es auch in Beziehung auf die andere sind.

b) Die eigentliche gemeinschaftliche Sekante kann gegen die zwei Curven eine gleichartige oder eine ungleichartige Lage haben. Gleichartig heisst diese Lage, wenn jeder Punkt ihrer Richtung im Verhältniss zu beiden Curven zugleich ein innerer oder auch zugleich ein äusserer ist; ungleichartig heisst sie, wenn jeder ihrer Punkte, welcher ein innerer Punkt der einen Curve ist, zugleich ein äusserer der andern ist. Jede uneigentliche Sekante hat gegen die zwei Curven stets eine gleichartige Lage, indem ihre Punkte im Verhältniss zu beiden Curven äussere sind.

c) Haben zwei Curven der zweiten Ordnung zwei Tangenten gemein, so heisst der Vielstrahl ihres Convergenzpunktes ein äusserer oder ein innerer gemeinschaftlicher Vielstrahl, je nachdem jene Tangenten reell oder zusammen gehörig imaginär sind. Uebrigens erkennt man den innern wie den äussern Vielstrahl daran, dass jede zwei Strahlen, welche in Beziehung auf die eine Curve conjugirt sind, es auch in Beziehung auf die andere sind.

d) Der äussere gemeinschaftliche Vielstrahl, kann gegen seine zwei Curven eine gleichartige oder eine ungleichartige Lage haben. Gleich-

artig heisst diese Lage, wenn jeder Strahl desselben in beiden Curven zugleich eine eigentliche oder zugleich eine uneigentliche Sekante ist; ungleichartig heisst sie, wenn jeder Strahl, welcher eine eigentliche Sekante der einen Curve ist, eine uneigentliche Sekante der andern ist. Jeder innere gemeinschaftliche Vielstrahl hat stets eine gleichartige Lage gegen die zwei Curven, in dem jeder Strahl desselben eine eigentliche Sekante der beiden Curven ist.

Dass zwei Curven zweiter Ordnung auch ein Paar zusammen gehöriger imaginärer Punkte und also auch eine uneigentliche Sekante gemeinschaftlich haben können, folgt unmittelbar aus §. 118, wonach eine solche Curve durch fünf Punkte ihres Umfanges auch für den Fall bestimmt ist, dass ein Paar imaginärer Punkte darunter sind. Man kann nach der dort gegebenen Regel beliebig viele solche Curven zeichnen, welche alle durch dieselben zwei imaginären Punkte gehen, und sonst von einander verschieden sind. Wenn nun aber eine gemeinschaftliche Sekante mit zwei Curven der zweiten Ordnung nur ein und dasselbe Paar von reellen oder imaginären Punkten gemeinschaftlich hat, so muss auch die Involution ihrer conjugirten Punkte in Beziehung auf beide Kegelschnitte eine und dieselbe sein, und umgekehrt: so oft dieses Merkmal an den Punkten bemerkbar ist, so wird man schliessen, dass sie eine gemeinschaftliche, eigentliche oder uneigentliche Sekante der zwei Curven ist.

Ebenso schliesst man auch, gestützt auf §. 118, dass zwei Curven zweiter Ordnung ein Paar zusammen gehöriger, imaginärer Tangenten gemeinschaftlich haben können, welche in ihrem stets reellen Convergenzpunkt einen gemeinschaftlichen Vielstrahl bestimmen, der, sei es ein innerer oder äusserer, an dem Merkmal erkannt wird, dass die Involution seiner conjugirten Strahlen in Beziehung auf beide Curven dieselbe ist.

Hinsichtlich der eigentlichen gemeinschaftlichen Sekanten und Vielstrahlen ist noch in Betreff ihrer Lage eine Verschiedenheit möglich, die nicht übersehen werden darf. Durch die reellen Punkte, in welchen die eigentliche Sekante die zwei Curven schneidet, wird sie in zwei Abschnitte getheilt, von

welchen der eine die endliche Strecke zwischen jenen Punkten ist, während der andere aus zwei unendlichen Aesten besteht, die in einem Punkt des unendlichen Raumes zusammenhängen. Die Endpunkte der Strecke sind die Hauptpunkte der Involution, welche durch die conjugirten Punkte ihrer Richtung gebildet wird (§. 111, b), sie werden also von jedem Paar der conjugirten Punkte harmonisch getrennt, so dass der eine Punkt eines solchen Paares auf der endlichen Strecke, der andere ausserhalb derselben liegt. Wenn nun der eine dieser Punkte im Verhältniss zu dem einen Kegelschnitt ein innerer ist, so ist der andere ein äusserer Punkt desselben. Es kann also sehr wohl der Fall eintreten, dass von zwei conjugirten Punkten einer gemeinschaftlichen, eigentlichen Sekante, derselbe Punkt im Verhältniss zu dem einen Kegelschnitt ein innerer, und im Verhältniss zum andern Kegelschnitt ein äusserer ist, dann zeigt aber auch sein conjugirter Punkt eine solche ungleichartige Lage, und an dieser Eigenschaft der ungleichartigen Lage nehmen auch alle andern Punkte der gemeinschaftlichen Sekante Antheil; da alle Punkte der endlichen Strecke dieselbe Lage gegen einen und denselben Kegelschnitt haben. Die gemeinschaftliche, eigentliche Sekante kann also nicht nur eine gleichartige, sondern auch eine ungleichartige Lage gegen ihre zwei Curven haben. Man wird leicht sehen, wie dieselben Verhältnisse bei einem gemeinschaftlichen, äussern Vielstrahl wiederkehren, und zur Unterscheidung der gleichartigen und ungleichartigen Lage berechtigen.

Neuntes Buch.

Collineation der Kegelschnitte.

A. Projektivische Collineation der Kegelschnitte.

§. 120. Zwei Kegelschnitte sind homologe Curven zweier collineären Systeme, sobald zwei Punkte nebst ihren Tangenten und ein dritter Punkt der einen Curve mit zwei Punkten, ihren Tangenten und einem dritten Punkt der andern Curve homologe Elemente dieser Systeme sind. Will man also zwei gegebene Kegelschnitte projektivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Punkten auf dem Umfang des einen Kegelschnitts drei Punkte auf dem Umfang des andern nach Belieben annehmen; alsdann ist aber die Beziehung zwischen den übrigen Punkten vollkommen bestimmt. In solchen collineär aufeinander bezogenen Kegelschnitten bemerkt man noch folgende Gesetze:

a) Sind in den collineären Systemen zweier Kegelschnitte zwei Punkte homolog, so sind auch ihre Polaren homologe Richtungen dieser Systeme, und umgekehrt: sind auch die Pole zweier homologen Richtungen zwei homologe Punkte der Systeme.

b) Sind zwei Punkte oder auch zwei Richtungen in dem System des einen Kegelschnitts einander conjugirt, so sind auch ihre homologen Punkte und ihre homologen Richtungen im System des andern Kegelschnitts conjugirt.

c) Sind in den collineären Systemen zweier Kegelschnitte zwei homologe Geraden und auf denselben zwei homologe Punkte gegeben, und zieht man durch jeden dieser Punkte eine andere Richtung, welche der ersten in ihrem System conjugirt ist, so sind auch diese zwe i Richtungen homolog.

Sind in dem System eines Kegelschnitts drei Punkte A, B, C *) und die Tangenten der Punkte A und B, welche in D convergiren, und in dem System eines andern Kegelschnitts die Punkte A′, B′, C′ und die Tangenten der Punkte A′ und B′, welche in D′ convergiren, gegeben, so reichen die Vierecke ABCD und A′B′C′D′ hin, um die Systeme der zwei Kegelschnitte collineär auf einander zu beziehen (§. 43), und es fragt sich jezt nur noch, ob auch die Kegelschnitte selbst homologe Curven der Systeme sind, so dass jedem Punkt auf dem Umfang des einen Kegelschnitts wieder ein Punkt auf dem Umfang des andern Kegelschnitts entspreche. Durch jedes jener Vierecke ist aber auch andererseits der Kegelschnitt seines Systems vollkommen bestimmt. Denn die zwei Dreistrahlen A, BDC und B, DAC bestimmen die Conformität der Vielstrahlen, und in den Convergenzpunkten ihrer homologen Strahlenpaare alle Punkte des Kegelschnitts ABCD. Und ebenso ist der Kegelschnitt A′B′C′D′ durch die Dreistrahlen A′, B′D′C′ und B′, D′A′C′ bestimmt. Es gibt also zu jedem vierten Punkt F des ersten Kegelschnitts nur einen einzigen vierten Punkt F′ des zweiten Systems und dieser muss auf dem Umfang des Kegelschnitts liegen, weil die in F′ convergirenden Strahlen der Vielstrahlen A′ und B′ den in F convergirenden Strahlen der Vielstrahlen A und B, und also auch wie jene unter sich homolog sind, und zugleich auf dem Umfang des Kegelschnitts A′B′C′D′ convergiren. Zwei Kegelschnitte können daher auf sehr mannigfache Weise collineär auf einander bezogen werden, indem drei Paare von homologen Punkten nach Belieben angenommen werden können. So oft aber eine solche collineäre Beziehung festgestellt ist, so stehen alle anderen Punkte und Richtungen in bestimmter Abhängigkeit. Sind z. B. P und P′ zwei solche homologe Punkte der zwei Systeme und zieht man nun im ersten System die Geraden PMN und PKL, und in dem anderen System die homologen Geraden

*) Man wird die zu Grunde liegende Figur leicht selbst zeichnen.

P'M'N' und P'K'L', so sind hierduch in jedem System auch die Polaren p und p' der Punkte P und P' bestimmt, weil Pol und Polare die homologen Punkte der Involution harmonisch trennen (§. 106), und also die Schnittpunkte G und H der Polare p und die Schnittpunkte G' und H' der Polare p' construirt werden können. Eben desswegen ist aber auch PMNG ⊼ P'M'N'G', PKLH ⊼ P'K'L'H' (§. 17). Es sind also H und H', G und G' homologe Punkte, und die Polaren p und p' welche durch dieselben bestimmt werden, zwei homologe Geraden der zwei Systeme der Kegelschnitte (§. 42, d). Sind dagegen zwei homologe Richtungen p und p' dieser zwei Systeme gegeben, so kann man auf denselben die homologen Punkte G und G', H und H' nehmen und zu ihnen in den betreffenden Kegelschnitten die Polaren g und g', h und h' construiren. Dann sind aber nach dem unmittelbar Vorausgehenden g und g', h und h' homologe Richtungen, deren Convergenzpunkte P und P' also ebenfalls homolog sind (§. 42, e). Die Pole homologer Richtungen sind also selbst homolog. Sind endlich zwei homologe Richtungen p und p' und auf denselben zwei homologe Punkte G und G' gegeben, so sind also auch die Pole P und P' der homologen Richtungen p und p' homolog, daher müssen auch die Richtungen GP und G'P' homolog sein. Diese Richtungen sind aber zugleich auch den Richtungen p und p' conjugirt (§. 109, a).

B. Perspektivische Collineation zweier Kegelschnitte.

§. 121. Haben zwei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Sekante gleichartiger Lage, so sind sie für die Richtung derselben als Axe in doppeltem Sinne, nämlich für zwei Centra perspektivisch collineär. Diese Collineationssysteme sind noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Die zwei Centra liegen mit den zwei Polen, welche der Richtung der Axe in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen auf einer Geraden und werden durch dieselbe harmonisch getrennt.

b) Diese zwei Pole trennen einen der Pole von der Axe, während sie den andern mit ihr einschliessen. Die Collineation, in welcher Axe und Centrum von diesen Polen eingeschlossen werden, ist durch eine

einstimmige Lage, die andere Collineation, in welcher Centrum und Axe durch diese Pole getrennt werden, durch eine entgegengesetzte Lage der homologen Elemente ausgezeichnet.

c) Die zwei Centra sind die Scheitel zweier gemeinschaftlichen Vielstrahlen gleichartiger Lage.

§. 122. Haben zwei Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Vielstrahl gleichartiger Lage, so sind sie für den Scheitel desselben als Centrum in doppeltem Sinne, nämlich für zwei Axen, perspektivisch collineär.

Diese Collineationssysteme sind noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Die zwei Axen convergiren mit den zwei Polaren, welche dem Scheitel des Vielstrahls in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen, in einem Punkt, und werden durch dieselben harmonisch getrennt.

b) Diese zwei Polaren trennen auch die eine der Axen von dem Centrum, während sie die andere mit ihm einschliessen. Die Collineation, in welcher von diesen Polaren Axe und Centrum eingeschlossen wird, ist durch eine einstimmige Lage, die andere Collineation, in welcher Centrum und Axe durch diese Polare getrennt wird, ist durch eine entgegengesetzte Lage der homologen Elemente ausgezeichnet.

c) Die zwei Axen sind zwei gemeinschaftliche Sekanten gleichartiger Lage.

Die gemeinschaftlichen Sekanten und Vielstrahlen gleichartiger Lage stehen mit der perspektivischen Collineation zweier Kegelschnitte im engsten Zusammenhang. Ist die Gerade AB (Fig. 67) eine gemeinschaftliche Sekante gleichartiger Lage für die Kegelschnitte CDEF und C′D′E′F′, und sind R und K äussere Punkte der Kegelschnitte, welche den Punkten S und L der gemeinschaftlichen Sekante conjugirt sind, so convergiren die Polaren, welche diesen Punkten in den Kegelschnitten entsprechen in den Polen P und P′ der gemeinschaftlichen Sekante AB, und die Polaren des Punktes R bezeichnen überdiess auf dem einen Kegelschnitt die Punkte C und D, und auf dem andern die Punkte C′ und D′, während sie selbst in dem Punkte S convergiren, der dem Punkt R conjugirt ist. Weil nun aber der Pol P und seine Polare RS auch Centrum und Axe zweier involutorischen Systeme sind, welche die Curve

CEDF entsprechend gemein haben (§. 106), so sind auch CK und DK homologe Richtungen dieser Systeme (§. 46, d), welche ihrerseits wieder zwei homologe Punkte F und E auf der Curve bestimmen (§. 62, b). Es müssen also auch die Verbindungslinien FC und DE homologe Richtungen sein und in einem Punkt der Axe RS convergiren. Dieser Punkt ist offenbar kein anderer als eben der Punkt L, welcher dem Punkte K conjugirt ist (§. 109, f). Ganz auf dieselbe Weise wird man auch im andern Kegelschnitt die Polaren der conjugirten Punkte und das Viereck C′E′D′F′ construiren. Bezieht man nun aber zwei ebene Systeme so collineär auf einander, dass die Punkte K′, L′, C′, D′ den Punkten K, L, C, D homolog sind, so ist ihre Collineation vollkommen bestimmt (§. 43). Diese Systeme befinden sich überdiess in perspektivischer Lage, weil sie die Richtung KL und auf derselben die drei Punkte K, L, S entsprechend gemein haben (§. 45, c). Dass aber auch die zwei Kegelschnitte homologe Curven dieser zwei perspektivischen Systeme sind, das sieht man sogleich daran, dass die Verbindungslinien der vier Punkte C, D, K, L und der vier homologen Punkte C′, D′, K′, L′ nach dem Vorausgehenden in den Punkten F und E, F′ und E′ der zwei Curven convergiren, so dass also auch die Punkte F und F′, E und E′ der Curven homolog sind. Ausserdem convergiren auch die Tangenten der Punkte C und D, C′ und D′ in dem Punkt R, weil dieser der gemeinschaftliche Pol jener Richtungen ist, und es sind also die zwei Kegelschnitte homologe Curven der zwei perspektivischen Systeme (§. 120). Das Centrum O dieser Systeme wird durch die Verbindungslinie CC′ und DD′ zweier Paare homologer Punkte bestimmt.

Man hätte auch zwei Systeme so auf einander beziehen können, dass die Punkte K′L′D′C′ und KLCD sich entsprochen hätten, und man würde ganz auf demselben Wege gefunden haben, dass die Kegelschnitte auch noch für dieselbe Axe AB und ein anderes Centrum 𝔒 perspektivisch collineär sind, welches durch die Verbindungslinien C′D und CD′ zweier Paare homologer Punkte bestimmt wird.

Die Lage der zwei Centra O und 𝔒 dieser Collineationssysteme kann aus dem Bisherigen leicht erkannt werden. Denn weil die Axe AB beiden Collineationssystemen gemeinsam ist, so müssen auch die Pole P und P′, welche der Richtung AB in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen, homologe Punkte beider Collineationssysteme sein (§. 120, b). Es muss also die Verbindungslinie PP′ sowohl durch das Centrum O als auch durch das Centrum 𝔒 gehen (§. 46, a). Die Punkte P, P′, O und 𝔒 liegen also auf einer Geraden. Da ferner OC𝔒DD′C′ ein vollständiges Vierseit ist, dessen Diagonalen CD und C′D′ durch die Punkte P und P′, und die Diagonalen CD′ und C′D durch das Centrum 𝔒 gehen, so schliesst man, dass die Centra O und 𝔒 durch die Pole P und P′ harmonisch getrennt werden (§. 41, d). Weil hiernach die Centra O und 𝔒 durch die Richtungen CD und C′D′ getrennt werden, und die Axe KL durch den Convergenzpunkt S derselben geht, so muss auch sie mit einem Centrum 𝔒 durch die Punkte P und P′ eingeschlossen, und von dem andern Centrum 𝔒 durch jene Punkte getrennt werden. Weil ferner diese Punkte P und P′ homologe Punkte beider Collineationssysteme sind, so muss die Collineation für das Centrum 𝔒 und die Axe AB, welche eine Einschliessung erleiden, durch eine einstimmige Lage ihrer Elemente ausgezeichnet sein, während die Collineation für das Centrum O und die Axe AB, welche durch die Punkte P und P′ getrennt sind, eine entgegengesetzte Lage der homologen Elemente haben muss (§. 47, a).

Endlich kann noch bemerkt werden, dass die zwei Centra O und 𝔒 die Scheitel zweier gemeinschaftlichen Viehlstrahlen gleicher Lage sind. Weil nämlich die Kegelschnitte für ein solches Centrum O perspektivisch collineär sind, so sind auf jedem Strahl desselben zwei homologe Richtungen OC und OC′ vereinigt (§. 45, c), es sind also auch die Pole γ und γ', welche ihnen in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen, homologe Punkte (§. 120, a), und die Verbindungslinie $\gamma\gamma'$ geht also ebenfalls durch das Centrum O, folglich sind dieselben Strahlenrichtungen OC und Oγ, welche in Beziehung auf den einen

Kegelschnitt conjugirt sind, auch in Beziehung auf den andern conjugirt (§. 109, a).

Ganz auf die gleiche Weise entwickelt man auch die perspektivische Collineation, wenn vorausgesetzt ist, dass die Kegelschnitte einen Vielstrahl gleichartiger Lage gemeinschaftlich haben. Man kann Schritt für Schritt dem folgen, was hier bei dem reciproken Satze ausgeführt wurde, und es kann daher die Durchführung dem Leser überlassen bleiben.

C. Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte.

§. 123. Die Curven zweier Kegelschnitte haben immer zugleich vier Punkte und vier Tangenten gemeinschaftlich. Sie haben also zugleich gemeinschaftlich ein inbeschriebenes Viereck, sechs Sekanten, ein umbeschriebenes Vierseit, sechs Vielstrahlen und ein Polardreieck, in dessen Ecken die drei Paar Gegenseiten des inbeschriebenen Vierecks convergiren und in dessen Seiten die Richtungen der drei Diagonalen des umbeschriebenen Vierseits liegen. Man kann übrigens folgende fünf besondere Fälle unterscheiden.

a) Die vier gemeinschaftlichen Punkte sowohl, als auch die vier gemeinschaftlichen Tangenten sind reell. In diesem Fall sind die sechs gemeinschaftlichen Sekanten sowohl als auch die sechs gemeinschaftlichen Vielstrahlen reell und von gleichartiger Lage, auch sind die drei Ecken und die drei Seiten des gemeinschaftlichen Polardreiecks reell.

b) Die vier gemeinschaftlichen Punkte sind reell, aber die vier gemeinschaftlichen Tangenten sind imaginär. In diesem Fall sind die sechs gemeinschaftlichen Sekanten reell, aber nur zwei derselben haben eine gleichartige Lage; von den sechs gemeinschaftlichen Vielstrahlen sind nur zwei reell; die drei Ecken und die drei Seiten des gemeinschaftlichen Polardreiecks sind reell, aber nur auf einer Seite liegen zwei reelle Ecken des umschriebenen Vierseits.

c) Die vier gemeinschaftlichen Punkte sind zwar imaginär, aber die vier gemeinschaftlichen Tangenten sind reell. In diesem Fall sind von den sechs gemeinschaftlichen Sekanten nur zwei reell; die sechs gemeinschaftlichen Vielstrahlen sind reell, aber nur zwei haben eine gleichartige Lage; die drei Ecken und

die drei Seiten des gemeinschaftlichen Polardreiecks sind reell, aber nur in einem Eck convergiren zwei reelle Sekanten.

d) Zwei gemeinschaftliche Punkte und zwei gemeinschaftliche Tangenten sind reell, die zwei andern gemeinschaftlichen Punkte und die zwei andern gemeinschaftlichen Tangenten sind imaginär. In diesem Falle sind nur zwei gemeinschaftliche Sekanten und zwei gemeinschaftliche Vielstrahlen reell, von dem Polardreieck ist nur ein Eck und eine Seite, nämlich die Gegenseite jenes Ecks, reell; die zwei andern Ecken und die zwei andern Seiten sind imaginär.

e) Die vier gemeinschaftlichen Punkte und die vier gemeinschaftlichen Ecken sind imaginär. In diesem Falle sind ebenfalls nur zwei gemeinschaftliche Sekanten und zwei gemeinschaftliche Vielstrahlen reell, und in dem Polardreieck sind nur ein Eck und dessen Gegenseite reell.

Die Curven zweier Kegelschnitte haben zum Mindesten zwei Punkte gemeinschaftlich; denn wollte man auch annehmen, dass sie nur einen Punkt und also auch in demselben eine Tangente gemeinschaftlich haben, so lehrt §. 116, a, dass in jenem Punkt wirklich zwei gemeinschaftliche Punkte der Curven dieser Kegelschnitte vereinigt seien. Haben aber zwei Kegelschnitte zwei Punkte ihrer Curve gemein, so haben sie auch eine gemeinschaftliche Sekante. Diese Sekante hat eine gleichartige Lage gegen die Kegelschnitte, wenn die gemeinschaftlichen Punkte ihrer Curven, durch welche sie geht, imaginär sind; wenn aber diese Punkte reell sind, so kann die Sekante eine gleichartige oder eine ungleichartige Lage gegen die Kegelschnitte haben.

Haben nun zwei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Sekante AB (Fig. 65 und 67) gleichartiger Lage, so sind sie für ihre Richtung als Axe perspektivisch collineär und haben auch zwei Vielstrahlen O und 𝔒 von gleichartiger Lage gemeinschaftlich (§. 121, c). Die Richtung O𝔒, welche durch die Scheitel dieser Vielstrahlen gezogen wird, geht zugleich durch die Pole P und P′, welche der Richtung AB in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen (§. 121, a). Hieraus folgt, dass die

Scheitellinie O𝔒 der gemeinschaftlichen Vielstrahlen im Allgemeinen keine gemeinschaftliche Tangente ist, und dass also von den zwei Paaren ihrer berührenden Strahlen keine zwei in einer Richtung zusammen fallen, sondern dass vielmehr die Hauptstrahlen der Vielstrahlen O und 𝔒 vier gemeinschaftliche Tangenten bestimmen, die im Allgemeinen eine verschiedene Lage haben. Mehr als diese vier Tangenten können aber die zwei Kegelschnitte nicht gemeinschaftlich haben, wenn sie nicht mit allen ihren Punkten sich decken sollen (§. 118). Zu jedem der zwei Vielstrahlen O und 𝔒 gehört aber ausser der gemeinschaftlichen Sekante AB noch eine andere gemeinschaftliche Sekante 𝔄𝔅 (§. 122). Zwei solcher Sekanten AB und 𝔄𝔅 convergiren in einem Punkt Q, welcher durch die zwei Polaren bestimmt wird, die den Punkten O und 𝔒 in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen (§. 122, a). Es convergiren also auch die Sekanten AB und 𝔄𝔅 im Allgemeinen nicht in einem gemeinschaftlichen Punkt der Curven, und bestimmen somit vier verschiedene gemeinschaftliche Punkte derselben. Weil aber die zwei Curven auch nicht mehr als vier Punkte gemeinschaftlich haben können (§. 118), so folgt, dass die zwei Sekanten, welche neben der ersten AB durch die perspektivische Collineation für die Centra O und 𝔒 entwickelt werden, identisch sind. Alles diess zusammengefasst zeigt, dass die zwei Curven, sobald sie eine Sekante gleichartiger Lage gemeinschaftlich haben, allemal noch eine andere Sekante und zwei Vielstrahlen, oder dass solche Curven zugleich vier Punkte und vier Tangenten gemeinschaftlich haben. Ganz zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man von einem gemeinschaftlichen Vielstrahl gleichartiger Lage ausgeht.

Haben aber die Curven zweier Kegelschnitte zwei solche reelle Punkte gemein, deren Verbindungslinien eine gemeinschaftliche Sekante ungleichartiger Lage ist, wie A𝔄 (Fig. 66, b), so wird man sich überzeugen, dass dieser Fall nur dann eintreten kann, wenn noch zwei andere reelle gemeinschaftliche Punkte B und 𝔅 vorhanden sind; weil neben einer uneigentlichen Sekante, die jedenfalls eine gleichartige Lage hat (§. 119, a),

nur eine gemeinschaftliche Sekante gleichartiger Lage bestehen kann (§. 122, c). Diese zweite eigentliche gemeinschaftliche Sekante B𝔅 kann aber ebenso wenig eine gleichartige Lage haben, weil, wenn diess der Fall wäre, auch A𝔄 eine gleichartige Lage haben müsste. Haben nun aber zwei Kegelschnitte vier reelle gemeinschaftliche Punkte, und sind die Verbindungslinien A𝔄 und B𝔅 derselben zwei gemeinschaftliche Sekanten ungleichartiger Lage, so wird man leicht finden, dass von den übrigen Paaren der Verbindungslinien eines A𝔅 und 𝔄B ebenfalls durch eine ungleichartige Lage ausgezeichnet ist, während das andere AB und 𝔄𝔅 nothwendig eine gleichartige Lage haben muss. Zwei Kegelschnitte haben also auch in dem Fall, wenn sie eine Sekante ungleichartiger Lage gemeinschaftlich haben, immer auch ein Paar einander gegenüberstehender Sekanten gleichartiger Lage gemeinschaftlich. Auf dieselbe Weise findet man auch, dass zwei Kegelschnitte, welche einen Vielstrahl M ungleichartiger Lage gemeinschaftlich haben, neben demselben noch drei andere Vielstrahlen, 𝔐, N, 𝔑 (Fig. 66, a), ungleichartiger Lage, und zugleich aber auch noch zwei Vielstrahlen O und 𝔒 gleichartiger Lage gemeinschaftlich haben.

Allgemein folgt daher für die Curven zweier in einer Ebene liegender Kegelschnitte, dass sie immer zugleich vier Punkte und vier Tangenten oder also ein inbeschriebenes Viereck und ein umbeschriebenes Vierseit gemeinschaftlich haben.

Die drei Convergenzpunkte der drei Paar Gegenseiten des umbeschriebenen Vierecks bestimmen aber nach §. 109, f ein gemeinschaftliches Polardreieck, und die drei Diagonalen des umbeschriebenen Vierseits ein gemeinschaftliches Polardreiseit, zugleich zeigt aber §. 122, a, dass das erstere mit dem letztern identisch ist. Denn nach jenem Paragraph convergiren die zwei Gegenseiten AB und 𝔄𝔅 (Fig. 65) des inbeschriebenen Vierecks mit den Polaren rr, s𝔰, tt, q𝔮, welche den Gegenpunkten O und 𝔒 in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen, und nach §. 104, d liegt dieser Punkt Q zugleich auf den zwei Diagonalen M𝔐 und N𝔑 des umbeschriebenen Vierseits. Die Ecken des Polardreiecks liegen also zugleich auf den Seiten des Polardrei-

seits; die zwei Kegelschnitte haben also nur ein einziges Polardreieck QQ′Q″ gemeinschaftlich.

Nachdem nun die allgemeinen Verhältnisse entwickelt sind, mögen noch die besonderen Fälle unterschieden werden.

Haben die Curven zweier Kegelschnitte vier reelle Punkte A, B, 𝔄, 𝔅 gemeinschaftlich, welche ein reelles inbeschriebenes Viereck und sechs reelle Sekanten gleichartiger Lage bestimmen (Fig. 65), so gehört zu jedem Paar Gegenseiten ein Paar reeller Vielstrahlen gleichartiger Lage O und 𝔒, M und 𝔐, N und 𝔑, welche durch die Ecken des umbeschriebenen Vierseits gebildet werden. Die vier gemeinschaftlichen Tangenten und das gemeinschaftliche Polardreieck sind also ebenfalls reell.

Haben die zwei Curvenpaare vier reelle Punkte und also ein eigentliches inbeschriebenes Viereck gemeinschaftlich, dessen Seiten aber nur zwei Sekanten gleichartiger Lage bestimmen, so entsprechen auch nur diesem Paar der gemeinschaftlichen Sekanten zwei gemeinschaftliche Vielstrahlen mit reellen Scheiteln O und 𝔒 (Fig. 66, b). Die vier gemeinschaftlichen Tangenten können daher nicht reell sein, weil sonst ihre vier übrigen Convergenzpunkte nicht imaginär sein könnten; die reellen Scheitel in O und 𝔒 der gemeinschaftlichen imaginären Tangenten sind also innere Punkte der Kegelschnitte. Weil das inbeschriebene Viereck reell ist, so ist auch das Polardreieck QQ′Q″ reell, es liegen aber nur auf der Richtung einer Seite Q′Q″ zwei reelle Ecken O und 𝔒 des umbeschriebenen Vierseits.

Haben die zwei Curven vier imaginäre Punkte, aber zugleich vier reelle Tangenten, so können sie nur zwei reelle gemeinschaftliche Sekanten AB und 𝔄𝔅 haben, welche die zwei Paare der zusammen gehörigen imaginären Punkte verbinden (Fig. 66, a). Es können also auch nur ein Paar der Convergenzpunkte der Tangenten (O und 𝔒) ein Vielstrahl gleichartiger Lage bestimmen, die vier übrigen Convergenzpunkte M, 𝔐, N und 𝔑 bezeichnen gemeinschaftliche Vielstrahlen ungleichartiger Lage. Das Polardreieck QQ′Q″ ist zwar reell,

aber nur in einem Eck Q desselben convergiren zwei reelle gemeinschaftliche Sekanten AB und 𝔄𝔅.

Wenn die Curven zwei reelle und zwei imaginäre Punkte gemeinschaftlich haben, so können nur die Sekante AB, *) welche die zwei reellen Punkte verbindet, und die Sekante 𝔄𝔅, welche die zwei imaginären Punkte verbindet, reell sein (§. 116, a); die vier übrigen gemeinschaftlichen Sekanten sind imaginär (§. 115, b); auch sind die zwei Convergenzpunkte Q′ und Q″ dieser letzteren imaginär, weil sie nicht aus den zusammengehörigen Paaren imaginärer Richtungen entstanden sind. Dagegen ist die Richtung Q′Q″ der imaginären Punkte Q′ und Q″ reell, weil diese Punkte als Ecken eines Polardreiecks ein Paar zusammengehöriger imaginärer Punkte darstellen. Das gemeinschaftliche Polardreieck der zwei Curven hat also in diesem Fall nur ein reelles Eck Q, in welchem die zwei gemeinschaftlichen reellen Sekanten convergiren, und eine reelle Seitenrichtung, welche die zwei anderen imaginären Convergenzpunkte Q′ und Q″ der übrigen imaginären Sekanten verbindet. Die zwei anderen Ecken selbst und die zwei Richtungen, welche sie mit dem reellen Eck Q verbinden, sind imaginär (§. 115, b). Es können sonach auch nur die Ecken O und 𝔒 des umbeschriebenen Vierseits reell sein, welche auf der reellen Seitenrichtung Q′Q″ des Polardreiecks liegen. Da nun aber die gemeinschaftlichen Punkte 𝔄 und 𝔅 der Curven imaginär sind, so ist die Richtung 𝔄𝔅 eine uneigentliche, gemeinschaftliche Sekante derselben, die Pole 𝔓 und 𝔓′, welche dieser Richtung in den Kegelschnitten entsprechen, sind also innere Punkte der Kegelschnitte, und weil diese Pole die Punkte O und 𝔒 harmonisch trennen, so muss nothwendig einer dieser Punkte, etwa 𝔒, als von den inneren Punkten 𝔓 und 𝔓′ eingeschlossen, ebenfalls ein innerer Punkt der Kegelschnitte sein. Ferner weil die Pole P und P′ der Richtung AB äus-

*) Man kann die Fig. 65 benützen, obgleich sie nicht für den vorliegenden Fall gezeichnet ist.

sere Punkte sind, so muss aus demselben Grund das andere Centrum O, welches von ihnen ausgeschlossen wird, ein äusserer Punkt der Kegelschnitte sein. Hieraus folgt aber, dass die Kegelschnitte zwei reelle Tangenten haben, die in dem äusseren Centrum O convergiren, und zwei imaginäre Tangenten, welche in dem innern Centrum 𝔇 convergiren (§. 116, c).

Wenn zwei Kegelschnitte zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten haben, so findet man ganz auf dieselbe Weise, dass ihr gemeinschaftliches Polardreieck ebenfalls nur ein reelles Eck und eine reelle gegenüberstehende Seite haben, und dass zwei ihrer gemeinschaftlichen Punkte reell und die zwei anderen imaginär sind.

Wenn endlich zwei Kegelschnitte vier imaginäre Punkte haben und nicht auf den Fall c zurückkommen sollen, so müssen sie auch lauter imaginäre Punkte haben — ein Fall, der offenbar eintrifft, wenn ein Kegelschnitt in der Fläche des andern liegt, ohne dass ihre Curven sich schneiden oder berühren. In diesem Falle findet man, wie in dem unmittelbar vorausgehenden, dass die Kegelschnitte ein gemeinschaftliches Polardreieck haben, das nur eine reelle Seitenrichtung und ein reelles Eck hat.

D. Oskulation der ersten Ordnung.

§. 124. Zwei Kegelschnitte vollziehen in einem Punkt eine Oskulation der ersten Ordnung, wenn in demselben zwei gemeinschaftliche Punkte ihrer Curven, und also auch in der Tangente jenes Punktes zwei gemeinschaftliche Tangenten zusammenfallen. Die Oskulation der ersten Ordnung ist ein einfaches Berühren, das durch folgende weitere Merkmale ausgezeichnet ist:

a) Der Berührungspunkt der zwei Curven ist immer reell und bildet den Scheitel eines gemeinschaftlichen Vielstrahls gleichartiger Lage; ebenso ist die Tangente des Berührungspunktes immer reell und ist eine gemeinschaftliche Sekante gleichartiger Lage.

b) Ausser dem gemeinschaftlichen Vielstrahl des Berührungspunktes existirt immer noch ein zweiter, dessen Scheitel nicht auf der Tangente

des Berührungspunktes liegt. Ebenso gibt es immer noch eine zweite gemeinschaftliche Sekante, welche nicht durch den Berührungspunkt der Curven geht.

c) Ist diese zweite gemeinschaftliche Sekante eine uneigentliche, so haben die zwei Curven keinen andern reellen Punkt, als den Berührungspunkt gemeinschaftlich, und es liegt die eine mit ihrer Fläche ganz innerhalb, oder ganz ausserhalb der andern. Im ersten Fall sagt man, sie berühren sich von innen, im zweiten, sie berühren sich von aussen.

d) Ist diese zweite Sekante aber eine eigentliche, so haben die Curven noch zwei reelle Punkte mit einander gemein, und es liegt die eine Curve nur zwischen dem Berührungspunkt und jener zweiten gemeinschaftlichen Sekante in der andern. In diesem Falle berühren sie sich jedenfalls von innen.

e) Ein Kegelschnitt, welcher mit einem anderen in einem gegebenen Punkte eine Oskulation der ersten Ordnung vollzieht, ist vollkommen bestimmt, wenn noch drei Punkte seines Umfangs gegeben sind.

Wenn man bei der Betrachtung der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte auch auf die gegenseitige Lage der gemeinschaftlichen Punkte und der gemeinschaftlichen Tangenten ihrer Curven Rücksicht nimmt, wo namentlich das Zusammenfallen derselben in einem Ort von Wichtigkeit ist, so entdeckt man noch eine Reihe von besonderen Fällen, welche die Mühe eines näheren Eingehens hinreichend lohnen. Diese Fälle bieten aber eine so grosse Mannigfaltigkeit dar, dass ihnen in diesem und den vier folgenden Abschnitten eine besondere Betrachtung gewidmet werden muss.

Fallen von den vier gemeinschaftlichen Punkten der Curven zweier Kegelschnitte ein Paar in einem Ort (𝔇) aufeinander, so ist die gemeinschaftliche Sekante (AB) der Kegelschnitte zugleich eine reelle gemeinschaftliche Tangente derselben, und in ihrer Richtung decken sich offenbar auch die zwei Tangenten, welche durch die zwei gemeinschaftlichen Punkte gehen, und der Berührungspunkt der zwei Curven, d. h. der Ort, in welchem die zwei gemeinschaftlichen Punkte vereinigt sind, ist zugleich auch der Scheitel eines gemeinschaftlichen Viel-

strahls der zwei Kegelschnitte. Alles dieses folgt unmittelbar aus §. 123. Dass der gemeinschaftliche Vielstrahl des Berührungspunktes 𝔇 und die gemeinschaftliche Sekante AB, welche in der Richtung der Tangente des Berührungspunktes dargestellt ist, eine gleichartige Lage gegen die zwei Kegelschnitte haben muss, folgt daraus, dass hier jedenfalls zugleich zwei gemeinschaftliche Punkte, nämlich die des Berührungspunktes, und zwei gemeinschaftliche Tangenten, nämlich diejenigen, welche in der Tangente des Berührungspunktes vereinigt sind, reell sind, was bei den Fällen (§. 123, b und c), welche allein auch gemeinschaftliche Sekanten und Vielstrahlen ungleichartiger Lage haben, ausgeschlossen ist. Was sonst in den Sätzen d und e gesagt ist, folgt theils unmittelbar aus den allgemeinen Gesetzen des vorausgehenden Abschnitts, theils aus der perspektivischen Collineation dieser zwei Kegelschnitte, welche hier, wo alle gemeinschaftlichen Sekanten und Tangenten eine gleichartige Lage gegen die Kegelschnitte haben, überall vorausgesetzt werden muss.

Bezeichnet nämlich 𝔄𝔅 die andere gemeinschaftliche Sekante, welche durch die zwei gemeinschaftlichen Punkte geht, die nicht im Berührungspunkt 𝔇 liegen, und ist O*) der Scheitel desjenigen gemeinschaftlichen Vielstrahls in welchem die zwei anderen Tangenten convergiren, die nicht in der Sekante AB vereinigt sind, so werden die Pole P und P′, welche der Axe AB in den Kegelschnitten entsprechen, die Punkte O und 𝔇 trennen; weil aber die Axe AB ebenfalls durch 𝔇 geht, so werden sie auch das Centrum O von der Axe AB trennen, es ist also die Collineation des Centrums O und der Axe AB, sowie die des Centrums 𝔇 und der Axe 𝔄𝔅 durch eine entgegengesetzte Lage, die des Centrums 𝔇 und der Axe AB, und die des Centrums O der Axe 𝔄𝔅 durch eine einstimmige Lage der homologen Elemente ausgezeichnet.

*) Figur 67 kann benützt werden, obgleich sie nicht für den vorliegenden Fall gezeichnet ist.

Weil die zwei Curven ausser dem Berührungspunkt 𝔇 nur noch zwei Punkte 𝔄 und 𝔅 gemeinschaftlich haben, in welchen sie sich schneiden, so muss die eine Curve auf der einen Seite der Sehne 𝔄𝔅 innerhalb und auf der andern Seite von 𝔄𝔅 ausserhalb der andern Curve liegen. Es muss also auch in der Gegend des Berührungspunktes 𝔇 die eine Curve ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der anderen liegen. Wenn die Punkte 𝔄 und 𝔅 reell sind, so liegen beide Curven offenbar auf einer Seite des Berührungspunktes und berühren sich also von innen; wenn aber die Punkte 𝔄 und 𝔅 imaginär sind, so hört diese Beschränkung auf, und die Curven können sich von innen oder von aussen berühren.

Diese Art der Oskulation, wo die eine Curve vor und nach der Oskulation auf der gleichen Seite der andern Curve sich befindet, heisst insbesondere eine Berührung.

Endlich mag noch bemerkt werden, dass, wenn die Curve eines Kegelschnitts K und ein Punkt 𝔇 derselben gegeben sind, durch jede beliebigen drei anderen Punkte C′, D′, E′ ein zweiter Kegelschnitt, aber auch nur ein einziger gelegt werden kann, welcher den ersten in dem Punkte 𝔇 einfach berührt. Denn es ist 𝔇 das Centrum der Collineation, durch welche sie auf die erstere bezogen wird, man kann also durch die drei gegebenen Punkte C′, D′, E′ drei Collineationsstrahlen ziehen, welche auf dem gegebenen Kegelschnitt K die homologen Punkte C, D, E bestimmen. Da nun aber die Dreiecke CDE und C′D′E′ homologe Figuren der zwei perspektivischen Systeme sind, so werden die Convergenzpunkte der homologen Seiten CD und C′D′, CE und C′E′, ED und E′D′ in drei Punkten der Collineationsaxe 𝔄𝔅 convergiren. Es ist also die perspektivische collineäre Beziehung der zwei Systeme vollkommen bestimmt, und man kann zu einem vierten Punkt F auf der gegebenen Curve sogleich den homologen Punkt auf der gesuchten Curve finden.

E. Kegelschnitte mit doppelter Berührung.

125. Kegelschnitte mit doppelter Berührung sind solche, bei welchen ihre gemeinschaftlichen Punkte paarweise in zwei verschiedenen Orten, und also auch ihre gemeinschaftlichen Tangenten paarweise in zwei verschiedenen Richtungen vereinigt sind. Die übrigen Verhältnisse gestalten sich folgendermassen:

a) Von den sechs gemeinschaftlichen Sekanten der Kegelschnitte fallen zwei mit den gemeinschaftlichen Tangenten zusammen, die vier übrigen fallen alle in die Richtung der gemeinschaftlichen Berührungssehne. Von den sechs gemeinschaftlichen Vielstrahlen fallen zwei mit den Berührungspunkten der Kegelschnitte zusammen. Die vier übrigen sind in dem Convergenzpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten vereinigt.

b) Das gemeinschaftliche Polardreieck nimmt einen unbestimmten Charakter an. Die zwei Kegelschnitte haben unendlich viele Polardreiecke gemeinschaftlich, welche jedoch ein gemeinschaftliches Eck haben, den Convergenzpunkt der zwei gemeinschaftlichen Tangenten, und eine gemeinschaftliche Seitenrichtung, die Richtung der gemeinschaftlichen Berührungssehne.

c) Jede Gerade durchschneidet die zwei Curven der Kegelschnitte in solchen Paaren von Punkten, welche durch die zwei Seiten desjenigen Polardreiecks harmonisch getheilt werden, dessen eine Seite mit jener Geraden in einem Punkt der gemeinschaftlichen Sehnenrichtung convergirt.

d) Die zwei Berührungspunkte können imaginär oder reell sein, im ersten Fall haben alle gemeinschaftlichen Sekanten und Vielstrahlen eine gleichartige Lage gegen die Kegelschnitte; die gemeinschaftliche Berührungssehne ist eine uneigentliche Sekante, und der Convergenzpunkt der Tangenten ein innerer Punkt. Im zweiten Fall können der Vielstrahl im Convergenzpunkt der zwei gemeinschaftlichen Tangenten, und die Sekante in der Richtung der gemeinschaftlichen Berührungssehne eine gleichartige oder eine ungleichartige Lage gegen die zwei Kegelschnitte haben.

e) Zu einem gegebenen Kegelschnitt kann man immer einen, aber auch nur einen zweiten Kegelschnitt zeichnen, welcher den ersten in zwei gegebenen Punkten berührt und noch durch einen gegebenen Punkt geht, oder eine gegebene Richtung berührt.

Wenn zwei Kegelschnitte eine Sekante gemeinschaftlich haben, so haben sie allemal auch noch eine zweite Sekante gemeinschaftlich, welche im Allgemeinen durch zwei andere gemeinschaftliche Punkte ihrer Curven geht (§. 123). Wenn nun diese zwei Sekanten in einer Richtung (AB) zusammen fallen, so sind auch die gemeinschaftlichen Punkte der ersten Sekante identisch mit denen der zweiten, weil eine und dieselbe Richtung jede Curve nur in zwei Punkten schneiden kann. Es fallen also auf dieser Richtung an zwei verschiedenen Orten A und B je zwei gemeinschaftliche Punkte zusammen; ebendamit müssen aber auch die zwei Tangenten, welche jedem solchen Paar coincidirender Punkte entsprechen, in einer Richtung vereinigt sein. Die vier gemeinschaftlichen Tangenten fallen also ebenfalls paarweise in zwei verschiedenen Richtungen AO und BO (Fig. 68) auf einander. Da nun die vier gemeinschaftlichen Punkte der zwei Kegelschnitte an zwei Orten A und B einer und derselben Richtung vereinigt sind, so werden auch die vier Sekanten, welche die zwei Punkte des einen Ortes A dieser Richtung mit den zwei Punkten des anderen Ortes B verbinden, in einer Richtung, nämlich in der ihrer gemeinschaftlichen Berührungssehne AB, auf einander fallen, während die zwei übrigen gemeinschaftlichen Sekanten, deren jede durch zwei in einem Ort vereinigte gemeinschaftliche Punkte geht, mit den zwei gemeinschaftlichen Tangenten AO und BO zusammen fallen. Weil ferner die Tangenten der vier gemeinschaftlichen Punkte zugleich beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich sind, so haben sie ausser ihnen keine gemeinschaftliche Tangenten. Diese paarweise sich deckenden vier gemeinschaftlichen Tangenten bestimmen nur drei Convergenzpunkte; der Convergenzpunkt A zweier Tangenten derselben Richtung coincidirt mit dem Berührungspunkt A dieser Richtung, es sind also die Berührungspunkte A und B der zwei gemeinschaftlichen Tangenten verschiedener Richtung zugleich auch die Scheitel zweier gemeinschaftlichen Vielstrahlen. Die vier übrigen Convergenzpunkte der Tangentenpaare verschiedener Richtung convergiren alle in einem und demselben

nkte O, in welchem also auch die vier übrigen gemeinschaftlichen Vielstrahlen coincidiren.

Ein Eck des gemeinschaftlichen Polardreiecks wird durch die zwei gemeinschaftlichen Sekanten bestimmt, welche in einer Richtung mit den zwei gemeinschaftlichen Tangenten vereinigt sind; der Convergenzpunkt O der zwei gemeinschaftlichen Tangenten verschiedener Richtung ist also ein Eck jenes Polardreiecks. Die vier übrigen gemeinschaftlichen Sekanten, die alle in der Richtung der gemeinschaftlichen Berührungssehne AB vereinigt sind, hören auf in bestimmten Punkten zu convergiren; die zwei anderen Ecken des gemeinschaftlichen Polardreiecks sind also unbestimmt. Dagegen ist die Richtung dieser gemeinschaftlichen Berührungssehne AB, weil auf ihr die zwei anderen Convergenzpunkte der übrigen gemeinschaftlichen Sekanten liegen, jedenfalls eine Seitenrichtung des gemeinschaftlichen Polardreiecks. Die zwei anderen Seitenrichtungen sind unbestimmt, weil vier Convergenzpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten in einem Punkt O vereinigt sind. Der besondere Fall der doppelten Berührung zweier Kegelschnitte ist daher dadurch ausgezeichnet, dass die Kegelschnitte unendlich viele gemeinschaftliche Polardreiecke haben, von welchem nur ein Eck O und eine Seitenrichtung AB bestimmt ist. In der That verhalten sich der Convergenzpunkt O der zwei gemeinschaftlichen Tangenten und die Berührungssehne AB als Pole und Polare in beiden Kegelschnitten (§. 107, a), und jedes Paar von conjugirten Punkten dieser Polaren sind auch dem Pol conjugirt und bilden also ein gemeinschaftliches Polardreieck der zwei Kegelschnitte. Die hierauf gegründete Eigenschaft, dass die Punkte C und D, C′ und D′ durch die Punkte M und R, welche durch die Seiten OM und ON eines Polardreiecks OMN auf einer durch M gehenden Geraden bestimmt werden, harmonisch getrennt werden, folgt unmittelbar aus §. 106.

In Betreff der besonderen Fälle, welche diese doppelte Berührung gewährt, ist zu bemerken, dass zwar die Punkte A und B, 𝔄 und 𝔅 als die Hauptpunkte der Involution

der conjugirten Punkte einer Richtung zusammen gehören, und entweder reell oder imaginär sein können, je nachdem die Richtung AB eine eigentliche oder eine uneigentliche Sekante ist. Auch muss A auf 𝔄 und B auf 𝔅 fallen, weil eine Richtung nur zwei Hauptpunkte hat, zudem werden in allen Fällen die zwei gemeinschaftlichen Sekanten A𝔄 und B𝔅 zu gemeinschaftlichen Tangenten der Curven, welche mit den Richtungen der Tangenten der Punkte A und 𝔄, B und 𝔅 übereinstimmen; diess hindert aber nicht, dass die Punkte A, 𝔄 und B, 𝔅 auch imaginär seien, weil nach der Voraussetzung nur die Punkte A und B, 𝔄 und 𝔅 zusammengehörige Punkte sind, und auch die Verbindungslinie zweier nicht zusammengehöriger imaginärer Punkte, auch wenn sie coincidiren sollten, imaginär bleibt (§. 115, b). Wenn die gemeinschaftlichen Punkte (A, 𝔄) und (B, 𝔅) imaginär sind, so haben alle gemeinschaftlichen Vielstrahlen der zwei Kegelschnitte eine gleichartige Lage (§. 119, b), wenn aber die Punkte A, 𝔄 und B, 𝔅 reell sind, so können die Sekanten AB, 𝔄𝔅 und die Vielstrahlen in O eine gleichartige (Fig. 68, a) oder eine ungleichartige Lage (Fig. 68, b) haben (§. 123, b), dagegen haben auch im letzteren Falle die Vielstrahlen A und B und die Sekanten AO und BO eine gleichartige Lage, und die Kegelschnitte sind also für diese Stücke jedenfalls perspektivisch collineär.

So oft nun ein Kegelschnitt ABCD und auf demselben zwei Punkte A und B gegeben sind, so kann man einen zweiten Kegelschnitt zeichnen, der den gegebenen in jenen Punkten berührt, aber auch der letztere ist vollkommen bestimmt, wenn noch ein Punkt E seiner Curve oder eine Tangente derselben gegeben ist. Immerhin kann man zur Richtung AB ihren Pol O bestimmen, und wenn der Fall der ungleichartigen Lage nicht vorliegt, zu O als Centrum und zu AB als Axe ein zweites collineäres System und durch den Collineationsstrahl OE noch ein Paar homologer Punkte E und E′ bestimmen, und ebendamit ist nicht nur die perspektivische Collineation der Systeme vollkommen bestimmt, sondern es sind auch die Curven, welche durch die Punkte A, B, E und A, B, E′ gehen

und in A und B gleiche gemeinschaftliche Tangenten haben, zwei homologe Curven zweier perspektivischen collineären Systeme (§. 120). Zugleich folgt aber aus §. 120, dass es nur eine einzige Curve AE'B gibt, welche der Aufgabe genügt. Sind die Punkte A, 𝔄 und B, 𝔅 reell, und hat der Strahl OE' eine ungleichartige Lage gegen die Kegelschnitte (Fig. 68, b), so lässt sich die Aufgabe durch die perspektivische Collineation des Centrums A und der Axe OB immerhin ausführen.

Man sieht leicht ein, wie der Kegelschnitt AE'B auch gezeichnet werden kann, wenn eine Tangente des zweiten Kegelschnitts statt des Punktes E' gegeben ist. Man darf hier nur den Schnittpunkt dieser Tangente mit AB aufsuchen und von demselben aus eine Tangente an den gegebenen Kegelschnitt ziehen, so liefern diese zwei Tangenten zwei homologe Linien der Curven, welche bekannt sind und neben dem Centrum und der Axe die Collineation der Systeme bestimmen.

F. Oskulation der zweiten Ordnung.

§. 126. Zwei Kegelschnitte vollziehen in einem Punkt eine Oskulation der zweiten Ordnung, wenn in demselben drei gemeinschaftliche Punkte ihrer Curven und in der Richtung der Tangente jenes Punktes drei ihrer gemeinschaftlichen Tangenten vereinigt sind. Obgleich solche Kegelschnitte in dem Punkt ihrer Oskulation eine gemeinschaftliche Tangente haben, so schneiden sie sich doch in demselben. Solche im engern Sinne oskulirende Kegelschnitte sind noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Sowohl die vier gemeinschaftlichen Punkte ihrer Curven, als auch ihre vier gemeinschaftlichen Tangenten sind reell.

b) Sowohl ihre gemeinschaftlichen Sekanten, als auch ihre gemeinschaftlichen Vielstrahlen haben eine gleichartige Lage gegen die Kegelschnitte. Uebrigens haben die Kegelschnitte nur zwei gemeinschaftliche Sekanten, welche beide durch den Oskulationspunkt gehen, und von welchen die eine mit der Tangente des Oskulationspunktes zusammenfällt, während die andere durch den vierten gemeinschaftlichen Punkt geht. Ebenso haben die Kegelschnitte nur zwei gemeinschaftliche Vielstrahlen, deren Scheitel auf der Tangente des Oskulationspunktes liegen. Der Scheitel des einen gemeinschaftlichen Vielstrahls

liegt im Oskulationspunkt selbst, und der Scheitel des anderen liegt auf der Tangente des Oskulationspunktes, da wo sie von der vierten gemeinschaftlichen Tangente geschnitten wird.

c) Das gemeinschaftliche Polardreieck reduzirt sich auf einen Punkt, den Oskulationspunkt, und das gemeinschaftliche Polardreiseit auf eine Richtung, nämlich die der Tangente des Oskulationspunktes.

d) Zu einem gegebenen Kegelschnitt kann man immer einen zweiten Kegelschnitt zeichnen, der den ersten in einem gegebenen Punkt seines Umfanges berührt; derselbe ist vollkommen bestimmt, wenn noch zwei Punkte seines Umfanges, oder zwei Tangenten gegeben sind.

e) Die Curven zweier Kegelschnitte schmiegen sich bei der Oskulation des zweiten Grades viel inniger an einander an, als diess bei der einfachen Berührung der Fall ist.

Die zwei gemeinschaftlichen Sekanten AB und 𝔄𝔅 zweier Kegelschnitte, auf welchen die zwei Paare ihrer gemeinschaftlichen Punkte liegen, convergiren zwar im Allgemeinen nicht in einem Punkte Q der Curven, damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass diess in besonderen Fällen nicht auch geschehen könnte. Wenn es geschieht, so fallen im Convergenzpunkt Q zugleich zwei gemeinschaftliche Punkte A und 𝔄 der Kegelschnitte auf einander und die gemeinschaftliche Sekante A𝔄 ist zugleich eine gemeinschaftliche Tangente der Kegelschnitte. Aber es hat diese Voraussetzung noch weitere Folgen. Denn in dem gemeinschaftlichen Polardreieck QQ′Q″ Fig. 65, ist das Eck Q der Pol der Gegenseite Q′Q″, und wenn also das Eck Q in einem gemeinschaftlichen Punkt der zwei Curven sich befindet, so muss auch die Gegenseite Q′Q″ durch diesen Punkt Q gehen und in demselben die zwei Kegelschnitte berühren (§. 107, e). Dann müssen aber auch der Convergenzpunkt Q′ der Sekanten A𝔅 und 𝔄B selbst und mit ihm noch die Punkte 𝔅 und Q″ in demselben Ort Q vereinigt sein. Es fallen also in einem und demselben Punkte zugleich drei gemeinschaftliche Punkte A, 𝔄, 𝔅 und die drei Eckpunkte Q, Q′ und Q″ des gemeinschaftlichen Polardreiecks zusammen, und folglich fallen auch in der Tangente jener Punkte die drei Seitenrichtungen des Polardreiecks und drei gemeinschaftliche Tangenten der zwei Kegel-

schnitte in eine Richtung. Es haben also die zwei Kegelschnitte zwei Richtungen, auf welcher je drei gemeinschaftliche Sekanten vereinigt sind; die eine dieser Richtungen ist die gemeinschaftliche Tangente des Punktes Q, die andere ist die Richtung 𝔅Q, Fig. 71, welche den vierten gemeinschaftlichen Punkt 𝔅 mit dem Punkt Q verbindet, in welchem die drei anderen gemeinschaftlichen Punkte vereinigt sind. Ebenso haben die zwei Kegelschnitte nur in zwei Punkten zwei gemeinschaftliche Vielstrahlen. Einer dieser Punkte ist der Punkt O, in welchem die drei Convergenzpunkte der in der Richtung AB vereinigten drei gemeinschaftlichen Tangenten liegen, der andere Punkt ist der Punkt 𝔒, in welchem diese drei in einer Richtung vereinigten Tangenten von der vierten gemeinschaftlichen Tangente geschnitten werden. Weil unter drei gemeinschaftlichen Punkten jedenfalls auch ein Paar zusammengehöriger gemeinschaftlicher Punkte 𝔄 und 𝔅 vereinigt sind, so muss der Punkt O jedenfalls ein reeller gemeinschaftlicher Punkt der zwei Kegelschnitte sein, es müssen also auch die drei in demselben vereinigte gemeinschaftliche Punkte, und also überhaupt alle vier gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten reell sein (116, a, c). Dabei ist klar, dass die zwei gemeinschaftlichen Vielstrahlen O und 𝔒, und die zwei gemeinschaftlichen Sekanten AB und O𝔅 eine gleichartige Lage haben müssen, weil eine ungleichartige Lage dieser Gebilde nur da vorkommt, wo entweder die vier Tangenten oder die vier gemeinschaftlichen Punkte imaginär sind (§. 123, b, c).

Zur Bestimmung der Collineationsverhältnisse bemerke man, dass die Pole 𝔓 und 𝔓′ der gemeinschaftlichen Sekante O𝔅, die Scheitel O und 𝔒 der zwei gemeinschaftlichen Vielstrahlen harmonisch trennen, so wird man schliessen, weil der Punkt O auf der Sekante O𝔅 selbst liegt, dass diese Pole 𝔓 und 𝔓′ auch den Scheitel 𝔒 von der Sekante O𝔅 trennen, und dass also die Collineation für das Centrum 𝔒 und die Axe O𝔅 durch eine entgegengesetzte Lage der homologen Elemente ausgezeichnet ist. Daraus folgt dann weiterhin, dass die Collineation für das Centrum 𝔒 und die Axe AB einstim-

mig, diejenige für das Centrum O und die Axe O𝔅 einstimmig, und diejenige für das Centrum O und die Axe AB entgegengesetzt ist (§. 122, b).

Weil die Curven der zwei Kegelschnitte ausser dem Oskulationspunkt O nur noch einen Punkt 𝔅 gemeinschaftlich haben, so werden sie sich in dem letzteren schneiden, und es wird also auf der einen Seite der Sehne O𝔅 die eine Curve mit dem Bogen OC′𝔅 innerhalb, und auf der andern Seite mit dem Bogen O𝔈′𝔅 ausserhalb der andern Curve OC𝔅𝔈 liegen. Die zwei Kegelschnitte schneiden sich also in den Punkten O und 𝔅, obgleich sie in dem Punkte O eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Diese Eigenthümlichkeit, welche mit der Oskulation der zweiten Ordnung verbunden ist, zeigt auf's Allerdeutlichste, dass die zwei Curven sich inniger an einander anschmiegen, als diess bei einer Oskulation der ersten Ordnung geschieht. Denn zieht man noch einen dritten Kegelschnitt mOr, welcher mit dem einen CO𝔈 eine Oskulation der ersten Ordnung vollzieht, so sind die Kegelschnitte CO𝔈 und mOr für die Richtung AB als Axe und ein ausserhalb ihrer liegendes Centrum o perspektivisch collineär (§. 124 ,b). Es sind aber auch die Kegelschnitte CO𝔈 und C′O𝔈′ für die Axe AB und das Centrum O perspektivisch, folglich sind auch die Kegelschnitte C′O𝔈′ und mOr für dieselbe Axe AB und noch ein anderes Centrum o′ perspektivisch, und zwar liegen die drei Centrum O,o,o′ in einer Geraden (§. 49, b.), es liegt also auch dieses Centrum o′ ausserhalb der Axe AB. Es folgt hieraus, dass auch die Kegelschnitte C′O𝔈′ und mOr eine Oskulation der ersten Ordnung vollziehen (§. 124, b.), die Curve mOr des dritten Kegelschnitts liegt also in der Nähe ihres Berechnungspunktes ganz innerhalb, oder ganz ausserhalb der zwei andern Curven CO𝔈 und C′O𝔈′, welche sich in dem Punkte O zugleich schneiden, die zwei letzteren schmiegen sich also inniger an einander an, als diess zwischen einer derselben und der erstern geschieht. Durch jeden Punkt O eines gegebenen Kegelschnittes können unendlich viele andere Kegelschnitte gelegt werden,

welche sich in O oskuliren. Denn man darf ja nur auf der Tangente des Punktes O einen andern Punkt $\mathfrak{O}$ wählen und für ihn als Centrum und O$\mathfrak{O}$ als Axe einen zweiten Kegelschnitt zeichnen, der dem ersten perspektivisch collineär ist, oder man kann einen solchen für den Punkt O als Centrum und eine beliebige durch O gehende Gerade als Axe eines zweiten collineären Kegelschnitts zeichnen, und man wird in beiden Fällen eine Oskulation der zweiten Ordnung in dem Punkte O bemerken. Der zweite Kegelschnitt ist bestimmt, wenn noch zwei Punkte R′ und S′ seines Umfanges gegeben sind. Denn die Collineationsstrahlen OR′ und OS′ bestimmen auch in dem gegebenen Kegelschnitt die homologen Punkte R und S, und der Convergenzpunkt T der zwei homologen Richtungen RS und R′S′ bestimmt mit dem Punkt O selbst, durch welchen die Collineationsaxe gehen soll, diese Axe OT. Es sind also das Centrum O, die Axe OT und ein Paar homologer Richtungen RS und R′S′ bekannt, die Collineation ist daher bestimmt, und man kann mit Leichtigkeit zu jedem Punkt des gegebenen Kegelschnitts den homologen Punkt des gesuchten finden.

G. Oskulation der dritten Ordnung.

§. 127. Zwei Kegelschnitte vollziehen eine Oskulation der dritten Ordnung in einem Punkt, wenn in demselben alle vier gemeinschaftlichen Punkte ihrer Curven, und in der Tangente jenes Punktes auch alle vier gemeinschaftlichen Tangenten vereinigt sind. Die Oskulation der dritten Ordnung ist wieder ein Berühren, das noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet ist:

a) Der Punkt ihrer Oskulation ist der einzige, in welchem die Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Vielstrahl haben, denn in ihm fallen ihre sechs gemeinschaftlichen Vielstrahlen auf einander; die Tangente jenes Punktes ist die einzige Richtung ihrer gemeinschaftlichen Sekanten, denn in jener Richtung sind ihre sechs gemeinschaftlichen Sekanten vereinigt.

b) Das gemeinschaftliche Polardreieck ist auf einen einzigen Punkt, den Punkt ihrer Berührung, und die Seitenrichtungen desselben sind auf eine einzige Richtung, die Richtung der Tangente jenes Punktes reduzirt.

c) Der Punkt der Oskulation der dritten Ordnung ist stets ein reeller, und von den zwei Kegelschnitten liegt der eine ganz in der Fläche des andern, so dass sie sich von innen berühren.

d) Zu einem gegebenen Kegelschnitt kann man immer einen zweiten Kegelschnitt zeichnen, der den ersten in einem gegebenen Punkte berührt; dieser zweite Kegelschnitt ist aber vollkommen bestimmt, wenn noch ein Punkt seines Umfanges, oder eine Tangente gegeben ist.

e) Zwei Kegelschnitte, welche eine Oskulation der dritten Ordnung vollziehen, schmiegen sich inniger aneinander an, als diess bei der Oskulation der zweiten und ersten Ordnung der Fall ist.

Der letzte besondere Fall, der noch zu betrachten übrig ist, tritt ein, wenn die vier gemeinschaftlichen Punkte in einem Orte vereinigt sind. Bei der Oskulation der zweiten Ordnung haben die zwei Kegelschnitte nur zwei gemeinschaftliche Sekanten, von welchen die eine die Kegelschnitte berührt und die andere durch den Berührungspunkt derselben geht. Wenn nun auch noch diese zwei Sekanten in eine Richtung zusammenfallen, so nimmt auch die zweite Sekante die Gestalt einer Tangente an, und die vier gemeinschaftlichen Punkte, welche durch die Sekanten bestimmt werden, coincidiren alle in dem gemeinschaftlichen Berührungspunkt, und ebendamit sind auch die vier Tangenten, welche diesen vier Punkten entsprechen, die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte in einer Richtung, nämlich in der Richtung der gemeinschaftlichen Sekanten vereinigt. Der Punkt O, Fig. 72, in welchem die Kegelschnitte sich berühren, ist nothwendig ein reeller, weil in demselben jedenfalls zwei Paare zusammengehöriger Punkte vereinigt sind (§. 116, a). Die vier gemeinschaftlichen Tangenten sind also ebenfalls reell. Die Oskulation der dritten Ordnung kann auch als ein besonderer Fall der Oskulation der ersten Ordnung betrachtet werden, welcher dadurch ausgezeichnet ist, dass die zweite gemeinschaftliche Sekante 𝔄𝔅 mit der ersten AB, welche durch den Berührungspunkt der Curven geht, zusammenfällt. Diese Anschauungsweise zeigt, dass bei der Oskulation der dritten Ordnung der eine Kegelschnitt ganz von dem andern umschlossen werden

muss und eine Berührung von innen vollzieht (§. 124, d.), weil auch die Berührungspunkte der zweiten Sekante reell sind. Dieses Resultat geht auch aus den Collineationsverhältnissen hervor. In dem Punkt O ihrer Oskulation sind alle vier gemeinschaftlichen Punkte, also auch alle gemeinschaftlichen Vielstrahlen, und in der Tangente AB dieses Punktes O alle gemeinschaftlichen Sekanten vereinigt, die Kegelschnitte sind also nur für den Punkt O als Centrum und für die Richtung AB als Axe, und zwar wie man leicht sieht, perspektivisch collineär, sie sind es aber nicht nur in entgegengesetzter Lage, sondern auch in einstimmiger Lage. Ist also der eine Kegelschnitt COD und der Punkt O gegeben, so ist eben damit das Centrum O und die Axe AB, welche den Kegelschnitt in O berührt, bekannt, und jeder zweite Kegelschnitt, der dem ersten für eben diese Axe, und für eben dieses Centrum in einstimmiger Lage perspektivisch collineär ist, oskulirt ihn nach der dritten Ordnung. *) Wenn also nur noch ein einziger Punkt C′ der Curve des zweiten Kegelschnitts gegeben ist, so kann man durch einen Collineationsstrahl OC′ den homologen Punkt C des ersten Kegelschnitts finden, und damit ist die Collineation, für welche Centrum, Axe und ein Paar homologe Punkte bekannt sind, vollkommen bestimmt, und man kann den zweiten Kegelschnitt ohne Mühe construiren.

Weil bei der Oskulation der dritten Ordnung ein Berühren von innen verbunden ist, so ist klar, dass ein dritter Kegelschnitt C″OD″, welcher in dem Punkte O mit dem Kegelschnitt COD im zweiten Grade oskulirt, nicht zwischen den zwei Cur-

*) In den drei früheren Fällen sind die Kegelschnitte auch für den Berührungspunkt O uud die Tangente AB desselben perspektivisch, aber nur in entgegengesetzter Lage. Hier aber sind sie, wo in O alle gemeinschaftlichen Vielstrahlen, und in AB alle gemeinschaftlichen Sekanten vereinigt sind, nicht nur in entgegengesetzter, sondern zugleich auch in einstimmiger Lage perspektivisch collineär. Die Collineation der entgegengesetzten Lage leistet in allen Fällen nichts, sie sagt aus, dass der Punkt O des Kegelschnittes COD dem Punkt C′ des Kegelschnittes C′O D′ homolog ist, und dass also die Tangenten in O und C′ in einem Punkte der Axe AB convergiren. Es sind also alle Punkte des Kegelschnittes C′OD′ einem und demselben Punkt O des Kegelschnittes COD homolog. Diese Collineation leistet also nichts.

ven der Kegelschnitte COD und C'OD' liegen kann. Er schneidet den ersten Kegelschnitt jedenfalls in einem reellen Punkte 𝔅, und es ist O𝔅 eine gemeinschaftliche Sekante der Kegelschnitte COD und C''OD'', und die zwei Kegelschnitte sind für den Punkt O als Centrum und die gemeinschaftliche Sekante O𝔅 als Axe perspektivisch collineär. Nun sind aber auch die Kegelschnitte COD und C'OD' für das Centrum O und die Axe AB perspektivisch collineär, folglich sind auch die Kegelschnitte C'OD' und C''OD'' für das Centrum O und eine andere Axe O𝔅', welche mit AB und O𝔅 in demselben Punkt O convergirt, perspektivisch collineär (§. 49, a). Daraus folgt aber, dass auch die Kegelschnitte C'OD' und C''OD'' in dem Punkte O eine Oskulation der zweiten Ordnung vollziehen und einander ebenfalls noch in einem Punkte 𝔅' durchschneiden (§. 126, b). Der dritte Kegelschnitt tritt also von der äusseren Seite der zwei Kegelschnitte, jenseits des Punktes O auf die innere Seite derselben, und schneidet hierauf beide wieder in den Punkten 𝔅 und 𝔅'. Die Annäherung der zwei ersten gegebenen Kegelschnitte ist also eine viel innigere als diejenige ist, welche durch den dritten Kegelschnitt geschieht und welcher mit den zwei ersteren eine Oskulation der zweiten Ordnung vollzieht.

II. Krümmungskreise.

§. 228. Zwischen Kreisen ist nur eine Oskulation der ersten Ordnung möglich.

Ein Kegelschnitt kann in einem Punkte von unendlich vielen Kreisen einfach berührt werden, aber nur ein einziger Kreis vollzieht in jenem Punkt eine Oskulation der zweiten Ordnung. Eine Oskulation der dritten Ordnung kann zwischen einem Kreis und einem Kegelschnitt im Allgemeinen nicht stattfinden; nur in den Scheitelpunkten der Axen ist eine solche möglich, dagegen ist sodann hier die Oskulation der zweiten Ordnung ausgeschlossen. Der Kreis, welcher mit einem Kegelschnitt eine Oskulation höherer Ordnung hervorbringt, heisst der Krümmungskreis des Punktes, in welchem diess geschieht.

Zwischen Kreisen kann nur eine Oskulation der ersten Ordnung stattfinden, weil zwei Kreise einander decken, sobald sie drei Punkte ihrer Curven gemeinschaftlich haben. Mit



einem Kegelschnitt kann ein Kreis im Allgemeinen keine höhere Ordnung der Oskulation begründen, als eine Oskulation der zweiten Ordnung, weil ein Kreis durch die drei Punkte, welche er mit dem Kegelschnitt im Oskulationspunkt gemeinschaftlich hat, schon vollkommen bestimmt ist. Diess zeigt sich auch darin, dass nur ein solcher Kreis construirt werden kann, sodald der Punkt O (Fig. 71), in welchem die Oskulation der zweiten Ordnung stattfinden soll, gegeben ist. Denn da dieser Punkt O das Centrum der einstimmigen perspektivischen Collineation für den Kegelschnitt und diesen Kreis sein muss, so kann man beliebige Collineationsstrahlen ihrer Systeme ziehen. Zieht man nun OD ⊥ OC, so entspricht die Sehne DC des Kegelschnitts offenbar einem Durchmesser des gesuchten Kreises. Construirt man noch eine zweite solche Sehne FG im Kegelschnitt, so wird der Convergenzpunkt M dieser zwei Sehnen dem Mittelpunkt M′ des gesuchten Kreises homolog sein. Dann ist aber auch die Polare mm, welche dem Punkt M des Kegelschnitts entspricht, der Polaren homolog, welche dem Mittelpunkt M′ des Kreises entspricht (§. 120, a). Die letztgenannte Polare ist aber eine Gerade des unendlichen Raumes (§. 107, c), folglich ist die Polare mm in dem System des Kegelschnitts die Gegenaxe bei der Collineation des Kegelschnitts und des gesuchten Kreises (§. 44). Die Axe der Collineation geht aber immer der Gegenaxe parallel (§. 47, d), und weil dieselbe bei einer Oskulation der zweiten Ordnung auch durch den Punkt O geht (§. 126, b), so ist folglich die Gerade O𝔅, welche durch O mit mm parallel gezogen wird, die Axe der Collineation. Durch das Centrum O, die Axe O𝔅 und die Gegenaxe mm ist aber die Collineation vollkommen bestimmt, und man kann sogleich den Kreis, oder wenn man lieber will, auch den Mittelpunkt desselben, welcher dem Punkt M homolog ist, construiren. Zieht man z. B. durch M die Richtung KJ, und an den Schnittpunkt J mit der Gegenaxe den Collineationsstrahl OJ, und nun durch den Schnittpunkt K mit der Axe KM′ ∥ OJ, so sind KM und KM′ homologe Richtungen der zwei Systeme (§. 47, e), und der Collineationsstrahl

OM bestimmt auf KM′ den Mittelpunkt M′ des gesuchten Kreises.

Man wird leicht finden, dass der Punkt M in die Richtung der Axe des Kegelschnitts fällt, sobald O in dem Scheitel dieser Axe liegt. Dann ist aber auch die Polare $\mathfrak{m}\mathfrak{m} \perp$ OM (§. 112, d), und also auch die Parallele $O\mathfrak{B} \perp$ OM; d. h. dann fällt die Axe $O\mathfrak{B}$ mit der Tangente $O\mathfrak{O}$ des Punktes O zusammen, d. h. es geht die Oskulation der zweiten Ordnung in eine Oskulation der dritten Ordnung über (§. 127, a).

I. Centrische Collineation coincidirender Kegelschnitte.

§. 129. Haben zwei collineäre Systeme die Curve eines Kegelschnittes entsprechend gemein, so sind sie immer auch centrisch collineär, und zwar verhalten sich das Centrum und die Axe dieser Systeme in Beziehung auf den Kegelschnitt wie Pol und Polare.

Umgekehrt: Sind in einer Ebene ein Kegelschnitt, ein Punkt und eine Richtung, welche letztere sich wie Pol und Polare verhalten, gegeben, so kann man immer zwei Systeme dieser Ebene für jenen Punkt als Centrum und jene Richtung als Axe centrisch collineär so auf einander beziehen, dass sie die Curve des Kegelschnitts entsprechend gemein haben.

Hiemit hängen noch folgende Eigenschaften der Kegelschnitte unmittelbar zusammen.

a) Sind zwei Paare homologer Punkte einer projektivisch auf sich bezogenen Kegelschnittcurve gegeben, so convergiren zwei gleichnamige Verbindungslinien der nicht homologen Punkte in einem Punkt der Axe der centrischen Collineation.

b) Wenn auf der Curve eines solchen Kegelschnittes zwei homologe Punkte eine solche Lage haben, dass ihre Verbindungslinie durch das Centrum geht, so geht auch die Verbindungslinie jedes anderen Paares homologer Punkte durch jenes Centrum, und die zwei Systeme sind involutorisch perspektivisch.

c) Wenn auf der Curve eines solchen Kegelschnittes zwei homologe Punkte eine solche Lage haben, dass ihre Verbindungslinie nicht durch das Centrum geht, so geht überhaupt keine solche Verbindungslinie durch das Centrum; dagegen berühren alle diese Verbindungslinien einen zweiten Kegelschnitt, der mit dem ersten eine doppelte Berührung

hat, und zwar ist die Axe der centrischen Collineation die Berührungssehne dieser doppelten Berührung.

d) Auch die Pole der Verbindungslinien der homologen Punkte bestimmen einen zweiten Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen auf derselben Berührungssehne eine doppelte Berührung vollzieht.

Das Ineinandergreifen zweier collineärer Systeme einer Ebene, welches in §. 45, a und b erkannt wurde, steht in der Mitte zwischen den zwei Fällen, welche durch die Prädikate projektivisch und perspektivisch unterschieden werden. Da aber jener Fall eben so selbstständig und begründet ist wie diese zwei extremen Fälle, so ist es wünschenswerth, denselben auch benennen zu können. Es mag daher der Fall, wo zwei collineäre Systeme einer Ebene einen Punkt und eine Richtung entsprechend gemein haben, mit dem Namen der centrischen Collineation bezeichnet werden, auch soll jener Punkt, in welchem allein zwei homologe Punkte der Systeme und jene Richtung, in welcher allein zwei homologe Richtungen der Systeme vereinigt sind, Centrum und Axe der Collineation heissen. Das Folgende wird zeigen, dass die centrische Collineation bei den coincidirenden Kegelschnitten eine ebenso grosse Rolle spielt, wie die perspektivische bei den auseinander liegenden Kegelschnitten.

Es können zwei in einer Ebene liegende Systeme so auf einander collineär bezogen werden, dass sie die Curve eines Kegelschnitts entsprechend gemein haben, denn man darf sich hierbei ja nur vorstellen, dass in dem Umfang des Kegelschnitts zwei Curven coincidiren, von welchen die eine dem einen und die andere dem andern Systeme angehört. Man wird also, wenn ein Kegelschnitt gegeben ist, zu drei Punkten A, B, C seines Umfanges noch drei andere Punkte A′, B′, C′ nach Belieben annehmen, und im Uebrigen nach der Regel des §. 120 verfahren, um die übrigen homologen Punkte zu bestimmen. Es gibt übrigens für diesen besonderen Fall noch eine bequemere Methode. Denn zieht man (Fig. 69) von dem Punkte A aus nach den Punkten A′, B′, C′ des zweiten Systems, und ebenso von dem Punkte A′ aus nach den Punkten

A, B, C des ersten Systems gerade Linien, so wird man bemerken, dass sie conforme Vielstrahlen bilden. Denn gesetzt, es seien auch S und S' noch zwei homologe Punkte der collineären Systeme, so ist

Vielstrahl $S, ABC \barwedge S', A'B'C'$ (§. 42, g).

$$\left.\begin{array}{l} S, ABC \barwedge A', ABC \\ S', A'B'C' \barwedge A, A'B'C' \end{array}\right\} \text{(§. 103, a)}$$

folglich $A', ABC \barwedge A, A'B'C'$ (§. 30).

Die Vielstrahlen A und A' sind somit conform, und weil auf ihrer Scheitellinie AA' zwei homologe Richtungen vereinigt sind, so befinden sie sich in perspektivischer Lage (§. 33, a). Die nach den homologen Punkten gezogenen Strahlen convergiren also alle auf einer Geraden MN. Diese Grade MN liefert nun ein sehr bequemes Mittel, um die gesuchten homologen Punkte der zwei Systeme zu bestimmen, indem alle Punkte der Geraden MN, welche von den Punkten A und A' aus auf die Curve projicirt werden, zugleich auch homologe Punkte der zwei Systeme sein müssen. Man wird aber noch weiter sehen, dass dieselbe Gerade MN für zwei beliebige andere homologe Punkte S und S' dieselbe Bedeutung hat. Denn es bilden diese Punkte S und S' mit A, A' und B, B' ein Sechseck AB'SA'BS', dessen gegenüberstehende Seiten stets in drei Punkten M, N, L einer Geraden convergiren (§. 104, a). So oft man also von irgend zwei Paaren homologer Punkte die nicht homologen Punkte durch Gerade mit einander verbindet, so convergiren die letzteren in Punkten einer und derselben Geraden MN. Diese Verallgemeinerung führt aber noch weiter. Wählt man nämlich die Punkte D und E (Figur 70) des ersten Systems gerade so, dass die Richtung DE durch den Pol O von MN geht, und construirt nach der vorausgehenden Regel die homologen Punkte D' und E', so müssen auch die Verbindungslinien DE' und D'E der nicht homologen Punkte in einem Punkt R der Geraden MN convergiren. Da aber die Punkte D und E nach Voraussetzung auf einem Strahl des Punktes O liegen, so sind DR und ER zwei homologe Gerade der involutorischen Systeme des Kegelschnitts, welche

den Punkt O zum Centrum und die Grade MN zur Axe haben, und es sind auch die Punkte D' und E', welche sie auf der Kegelschnittcurve bezeichnen, homologe Punkte dieser involutorischen Systeme (§. 106). Es muss also auch die Verbindungslinie D'E' in dem Punkte O convergiren (§. 46, a). Man sieht also, dass diejenigen Geraden des ersten Systems, welche durch den Pol O von MN gehen, nur mit solchen Geraden des zweiten Systems homolog sind, welche ebenfalls durch diesen Punkt gehen. Hieraus schliesst man aber, gestützt auf §. 42, e, dass in dem Punkte O zwei homologe Punkte der zwei collineären Systeme vereinigt sind und nun auch, gestützt auf §. 120, a, dass auf der Geraden MN zwei homologe Richtungen dieser Systeme vereinigt sind. Dieselben Systeme also, welche eine Kegelschnittcurve entsprechend gemein haben, haben ausser ihr auch noch einen Punkt und eine Richtung entsprechend gemein und sind also centrisch collineär, und zwar verhalten sich Centrum und Axe im Kegelschnitt wie Pol und Polare zu einander. Ist das Centrum O und also auch die Axe MN gegeben, so reicht ein Paar homologer Punkte A und A' der centrischen Collineation hin, damit diese vollkommen bestimmt sei. Nimmt man nun die Punkte A und A' so, dass die Richtung AA' durch den Pol O von MN geht, so gehören sie nach §. 106 zweien collineären Systemen an, welche für MN als Axe und für den Punkt O als Centrum involutorisch und also auch perspektivisch sind, folglich wird auch die Verbindungslinie jedes anderen Paares homologer Punkte durch das Centrum O gehen. Es folgt aber hieraus unmittelbar, dass wenn die zwei Systeme nicht involutorisch sind, dann auch keine einzige Verbindungslinie zweier homologer Punkte durch den Pol O der Richtung MN gehen kann, und es fragt sich nun noch, welche Lage die Verbindungslinien in dem letzteren Falle haben werden. Nun ist in dem Kegelschnitt ABB'A' (Fig. 73) durch den Pol O, die Polare MN und die Verbindungslinie AA' zweier homologer Punkte nicht nur jedes andere Paar homologer Punkte, sondern auch ein zweiter Kegelschnitt RST bestimmt, welcher mit dem erstern ABB'A'

eine doppelte Berührung hat und die Gerade AA' berührt (§. 125, e). Man wird aber leicht finden, dass eben dieser zweite Kegelschnitt RST auch jede andere Gerade BB' berührt, welche zwei beliebige homologe Punkte des ersten Kegelschnitts verbindet. Denn es werden die Verbindungslinien AB' und A'B der nicht homologen Punkte in einem Punkt N der Polare MN convergiren (§. 129, a), die zwei anderen Convergenzpunkte K und L der übrigen Verbindungslinien liegen auf der Polaren des Punktes N (§. 109, f), welche durch den Pol O der Geraden MN geht (§. 109, a). Weil hiernach OKL die Polare des Punktes N nicht nur für den Kegelschnitt ABB'A', sondern auch für den Kegelschnitt RST ist, und weil die involutorische Collineation (deren Modulus gleich Eins ist) durch den Pol und die Polare vollkommen bestimmt ist, so sind die Geraden AA' und BB' nicht nur homologe Richtungen der Involution des Kegelschnittes ABB'A' für das Centrum N und die Axe KL, sondern auch derjenigen des Kegelschnittes RST. Da nun aber die Richtung AA' den Kegelschnitt RST n. An. berührt, so muss auch die homologe Gerade BB' denselben berühren (§. 62, c). Dass auch die Pole der Geraden AA', BB' auf einem Kegelschnitte liegen werden, folgt aus der Reciprocität des Kegelschnittes (§. 108, e).

K. Die Brennpunkte.

§. 130. Wenn die Eckpunkte eines Dreiecks in einem gegebenen Kegelschnitt sich bewegen, während zwei Seiten desselben sich um zwei feste Punkte drehen, so kann die Lage der dritten Seite nach folgenden Regeln beurtheilt werden.

a) Wenn die zwei festen Punkte in Beziehung auf den Kegelschnitt conjugirt sind, so dreht sich die dritte Seite um einen Punkt, den Pol der durch jene festen Punkte bestimmten Richtung.

b) Wenn die zwei festen Punkte in Beziehung auf den Kegelschnitt nicht conjugirt sind, so berührt die dritte Seite einen anderen Kegelschnitt, welcher mit dem ersten in doppelter Berührung steht, und zwar geht die Berührungssehne dieser zwei Kegelschnitte durch jene zwei festen Punkte.

c) Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einen Kegelschnitt berüh-

ren, und zwei Ecken desselben in zwei gegebenen Geraden liegen, so beschreibt auch das dritte Eck eine Gerade, wenn jene gegebenen Geraden conjugirt sind, oder wenn diess nicht der Fall ist, so beschreibt es einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

§. 131. Wenn die Ecken eines Dreiecks in einem gegebenen Kegelschnitt sich bewegen, während eine Seite einen anderen Kegelschnitt berührt, der mit dem ersten eine doppelte Berührung hat, und eine zweite durch einen festen Punkt der Berührungssehne der zwei Kegelschnitte geht, so geht auch die dritte Seite durch einen anderen festen Punkt dieser Berührungssehne.

Der über der Hauptaxe eines Kegelschnitts als Durchmesser construirte Kreis hat mit diesem Kegelschnitt selbst eine doppelte Berührung; wenn nun ein Dreieck in diesen Kreis so beschrieben wird, dass eine Seite den Kegelschnitt berührt und die andere Seite durch den Mittelpunkt des Kreises geht, so geht die dritte Seite durch einen anderen constanten Punkt der Axe, und dieser ist ein Brennpunkt des Kegelschnittes. Daraus folgt, dass jeder Kegelschnitt zwei Brennpunkte hat, welche mit den im siebenten Buch angeführten Brennpunkten identisch sind.

§. 132. Wenn zwei Kegelschnitte einen Brennpunkt gemeinschaftlich haben, so sind sie für diesen Punkt als Centrum perspektivisch collineär; hiermit hängen noch folgende Eigenschaften zusammen.

a) Die Sehnen eines Kegelschnitts, welche vom Brennpunkt aus unter constanten Winkeln gesehen werden, berühren einen anderen Kegelschnitt, und der Pol dieser Sehne beschreibt ebenfalls einen Kegelschnitt.

b) Wenn zwei feste Tangenten eines Kegelschnitts von einer dritten beweglichen Tangente geschnitten werden, so wird das Stück der letzteren, welches zwischen den ersten liegt, vom Brennpunkt aus unter einem constanten Winkel gesehen.

Wenn Fig. 75. M und N zwei conjugirte Punkte des Kegelschnittes ABC sind, und von denselben aus nach einem beliebigen Punkt O der Kegelschnittcurve zwei Linien gezogen werden, welche derselben zum zweitenmal in den Punkten A und B begegnen, so wird die Polare des Punktes M durch den Punkt N gehen (§. 109) und die Gerade AC in einem solchen Punkt 𝔐 schneiden, dass die Punkte A und C durch

die Punkte M und 𝔐 harmonisch getrennt werden (§. 106). Ebenso wird die Polare des Punktes N durch den Punkt M gehen und auf BC einen Punkt 𝔑 bezeichnen, welcher mit dem Punkt N die Punkte B und C harmonisch trennt. Weil hienach die Punktreihe CAM𝔐 $\barwedge$ CBN𝔑 $\barwedge$ CB𝔑N und in C zwei homologe Punkte der Conformität vereinigt sind, so liegen die Punktreihen perspektivisch, und es convergiren die Geraden M𝔑 und N𝔐 in einem Punkte Q mit AB (§. 33), und dieser Punkt Q ist die Polare der Geraden MN (§. 109, d.) Es mag also der Punkt C angenommen werden, wie er will, so geht die dritte Seite AB doch stets durch den Pol Q derjenigen Geraden, welche die zwei festen Punkte M und N verbindet.

Wenn nun aber (Fig. 74) die Punkte M und N einander nicht conjugirt sind, und man construirt mehrere Dreiecke ABC, A'B'C' und A''B''C'' etc. so in den Kegelschnitt, dass zwei homologe Seiten derselben stets durch zwei feste Punkte M und N gehen, so sind nach §. 106 jedenfalls die Punkte A, A', A'', so wie auch die Punkte B,B',B'' den Punkten C, C', C'' involutorisch collineär, es bezeichnen also jedenfalls diese Punkte drei collineäre Systeme, von denen die zwei ersten mit dem letzteren perspektivisch liegen, die aber gegen einander nur projektivisch sind (§. 49). Hieraus folgt, dass die Verbindungslinie AB, A'B', A''B'' der homologen Punkte der zwei ersten Systeme einen Kegelschnitt berühren, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat (§. 129, c). Nun bemerke man aber, dass CAB''C''A''B ein Sechseck im Kegelschnitt ist, in welchem die Gegenseite CA und C''A'' in dem Punkte M, die Gegenseiten B''C'' und BC im Punkte N convergiren, so wird man schliessen, dass auch die Gegenseiten AB'' und A''B in einem Punkte der Richtung MN convergiren (§. 104, a), und folglich ist MN die Berührungssehne der zwei Kegelschnitte (§. 129, a). Weil nun durch den einen Kegelschnitt ABC, durch die Richtung der Geraden MN und durch eine Gerade AB, welche den zweiten Kegelschnitt berührt, der letztere vollkommen bestimmt ist (§. 125, e), so folgt, dass dieser Satz auch umgekehrt werden kann. Dieser Umkehrungssatz gibt

ein neues Mittel an die Hand, um zu einem Paar gegebener homologer Punkte A und B noch viele andere zu construiren, welche für eine gegebene Richtung MN homolog sind, er führt aber auch zu einer Einsicht in die Brennpunkte der Kegelschnitte. Construirt man nämlich über der Hauptaxe A𝔄 eines Kegelschnittes (Fig. 79) als Durchmesser einen Kreis, so berührt er den Kegelschnitt in den Scheitelpunkten, zeichnet man ferner in den Kreis ein Dreieck DGE, dessen eine Seite DE den Kegelschnitt in einem Punkt C berührt und dessen andere Seite durch den Mittelpunkt O geht, so geht die dritte Seite DG, dem Vorausgehenden zufolge, durch einen constanten Punkt F′. Zu einem zweiten solchen Punkte F″ kommt man durch ein Dreieck EDH, dessen Seite DH durch den Mittelpunkt geht. Man wird leicht sehen, dass diese zwei Punkte F′ und F″ in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt liegen, und mehr noch, man wird sehen, dass sie Brennpunkte des Kegelschnittes sind. Denn entwickelt man aus einem mit A𝔄 aus F″ beschriebenen Kreis und aus dem andern Punkt F′ einen Kegelschnitt nach der Methode §. 91, so erscheint A𝔄 als seine Axe (§. 97). Derselbe hat auch die Eigenschaft, dass wenn die eine Seite eines in den Kreis A𝔄 beschriebenen Dreiecks durch den Mittelpunkt geht, und die andere durch den Punkt F′, die dritte Seite ED den Kegelschnitt berührt (§. 98), es fallen also die Tangenten dieses construirten Kegelschnitts mit den Tangenten des gegebenen zusammen, und folglich fallen überhaupt auch die Curven dieser Kegelschnitte auf einander (§. 103, d). Man schliesst hieraus, dass die Punkte F′ und F″ wirkliche Brennpunkte des Kegelschnittes seien und an allen Eigenschaften, welche im sechsten Buch von denselben ausgesprochen wurden, Theil haben.

Nun ist jeder Kegelschnitt mit seinem Leitkreis, d. h. mit einem solchen Kreis, der aus seinem Brennpunkt als Mittelpunkt beschrieben wird, perspektivisch collineär, und zwar ist dieser Brennpunkt das Centrum ihrer Collineation (§. 87.) Hat man also zwei Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt und man beschreibt aus demselben einen Kreis,

so ist jeder der Kegelschnitte mit diesem Kreis für den Mittelpunkt des Kreises als Centrum perspektivisch collineär, folglich sind auch die zwei Kegelschnitte unter einander für den gemeinschaftlichen Brennpunkt als Centrum perspektivisch collineär (§. 49, a). Construirt man nun in dem Leitkreis des Kegelschnitts einen Centriwinkel und dreht ihn, ohne seine Grösse zu verändern, so bestimmt er solche Sehnen im Kreis, welche einander gleich sind, und welche gleich weit vom Mittelpunkt abstehen und daher einen zweiten mit dem ersten concentrischen Kreis berühren. Die Schenkel dieser Centriwinkel bestimmen aber als Collineationsstrahlen homologe Punkte und homologe Sehnen im collineären Kegelschnitt, welche auch eine Curve berühren werden, die dem Kreis homolog ist, welche von den Kreissehnen berührt wird, d. h. sie berührt ebenfalls einen Kegelschnitt (§. 86). Zieht man im Leitkreis zwei feste Tangenten und eine bewegliche, so wird man leicht finden, dass das Stück der beweglichen Tangente, welches zwischen den festen liegt, vom Mittelpunkt aus unter einem constanten Winkel erscheint. Diesen Tangenten entsprechen aber im collineären Kegelschnitt homologe Tangenten, welche sich in homologen Punkten durchschneiden; und weil das Centrum der Collineation im Mittelpunkt des Kreises liegt, so liegen die homologen Punkte im System des Kegelschnitts auf den Richtungen derselben Kreishalbmesser, es wird also auch das Stück der beweglichen Tangente des Kegelschnitts, welches zwischen den homologen festen Tangenten liegt, vom Brennpunkt aus unter einem constanten Winkel gesehen werden.

L. Affine Kegelschnitte.

§. 133. Wenn die Mittelpunkte zweier collineär auf einander bezogenen Kegelschnitte homolog sind, so sind die Kegelschnitte affin. Man kann übrigens nur solche zwei Kegelschnitte affin auf einander beziehen, welche in Betreff der Punkte des endlichen und unendlichen Raumes gleichartige Dimensionen haben. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man zu einem Durchmesser des einen Kegelschnitts, den homologen Durchmesser des anderen Kegelschnitts nach Belieben annehmen, damit sind aber sodann alle homologen Punkte ihrer Affinität

vollkommen bestimmt. Die affinen Kegelschnitte sind durch folgende Merkmale ausgezeichnet.

a) Jedem Durchmesser des einen Kegelschnitts ist wieder ein Durchmesser des andern Kegelschnitts homolog.

b) Sind zwei Durchmesser eines Kegelschnitts einander conjugirt, so sind auch die homologen Durchmesser des affinen Kegelschnitts einander conjugirt.

c) Sind mehrere Sehnen eines Kegelschnittes einander parallel, so sind auch die homologen Sehnen des affinen Kegelschnitts einander parallel, und denen des ersten Kegelschnitts proportional.

§. 134. In Betreff der perspektivischen Lage affiner Kegelschnitte kann bemerkt werden:

a) Wenn zwei Kegelschnitte zwei parallele gemeinschaftliche Tangenten haben, so sind sie für die Richtung dieser Tangenten als der ihrer Collineationsstrahlen perspektivisch affin. Die zwei Sehnen, welche auf einer solchen Richtung liegen, sind homolog und ihr Verhältniss ist dem Modulus der Affinität gleich.

b) Wenn zwei Kegelschnitte die zwei Endpunkte eines Durchmessers gemeinschaftlich haben, so sind sie für die Richtung dieses Durchmessers als Axe perspektivisch affin. Die Abschnitte, welche durch zwei homologe Punkte und die Axe auf einem Collineationsstrahl bestimmt werden, sind homolog, und ihr Verhältniss ist dem Modulus der Affinität der Kegelschnitte gleich.

c) Wenn zwei Kegelschnitte eine Axe mit einander gemein haben, so sind sie nicht nur für dieselbe als ihre Collineationsaxe perspektivisch affin, sondern sie haben auch auf der Richtung dieser Axe eine doppelte Berührung. Eine Gerade, welche senkrecht zu dieser Axe steht, bezeichnet die Richtung der Collineationsstrahlen, und die Sehnen, welche sie in den Kegelschnitten bildet, sind homolog, und ihr Verhältniss ist dem der Affinität der Kegelschnitte gleich.

Nachdem nun die Collineation der Kegelschnitte im Allgemeinen und in den wichtigsten besonderen Fällen durchgegangen ist, muss noch ein Blick auf die besonderen Formen der Collineation geworfen werden und zunächst auf die Affinität. Nun können aber nicht jede zwei beliebige Kegelschnitte affin auf einander bezogen werden, da die affinen Kegelschnitte in Betreff ihrer Punkte des endlichen und unendlichen Raumes

gleichartig sind (§. 51, c). Es können also nur zwei Ellipsen, welche mit allen ihren Punkten im endlichen Raum liegen, oder zwei Parabeln, welche nur mit einem Punkt im unendlichen Raum liegen, oder endlich zwei Hyperbeln, welche mit zwei Punkten im unendlichen Raum liegen, affin sein. Sollen aber zwei solche in Betreff ihrer Dimensionen gleichartige Kegelschnitte affin auf einander bezogen werden, so müssen in den affinen Systemen, denen sie angehören, die Geraden des unendlichen Raumes homolog sein (§. 51, a). Weil aber die Pole homologer Geraden auch wieder homologe Punkte sind (§. 120, a), so müssen auch die Mittelpunkte der affinen Kegelschnitte als die Pole der unendlich entfernten Geraden homologe Punkte derselben sein.

Will man aber zwei Kegelschnitte collineär auf einander beziehen, so kann man zu drei Punkten auf dem Umfang des einen Kegelschnitts K drei Punkte auf den Umfang des andern Kegelschnitts K′ nach Belieben annehmen (§. 120). Nimmt man nun aber die drei Punkte ABC des einen Kegelschnitts, so, dass A und B mit den Endpunkten eines Durchmessers, und der Punkt C mit dem Endpunkt des conjugirten Durchmessers zusammenfällt, und nimmt man sodann auch die Punkte A′B′C′ des andern Kegelschnittes ebenso, so sind die Systeme nicht nur collineär, sondern auch affin. Denn weil der Durchmesser AB dem Durchmesser A′B′ homolog ist, so müssen auch die Pole dieser Durchmesser homolog sein, diese liegen aber auf der Richtung ihrer conjugirten Durchmesser, welche durch die Punkte C und C′ gehen, die ebenfalls homolog sind (§. 75, a). Es sind also auch diese conjugirten Durchmesser homologe Richtungen (§. 42, d) und folglich sind auch die Mittelpunkte der Kegelschnitte homologe Punkte (§. 42, e) und die Kegelschnitte sind also affin. Man wird noch bemerken, dass auch dieser Weg zu der Bedingung führt, dass die Kegelschnitte gleicher Art sein müssen, denn nur wenn diess der Fall ist, sind die Endpunkte C und C′ der conjugirten Durchmesser zugleich endliche oder unendliche Punkte. Zugleich sieht man ferner, dass wenn zwei gleichartige Kegel-

schnitte affin auf einander bezogen werden sollen, nur zu einem Punkt auf dem Umfang des einen, ein Punkt auf dem Umfang des andern Kegelschnitts nach Belieben angenommen werden kann, und dass durch dieses einzige Paar homologer Punkte die affinen Systeme der Kegelschnitte vollkommen bestimmt sind. Die übrigen Sätze über die affinen Kegelschnitte folgen so unmittelbar aus dem, was bisher über die Affinität gesagt wurde, und aus den allgemeinen Regeln der perspektivischen Kegelschnitte, dass folgende Andeutungen genügen werden: Sind zwei gemeinschaftliche Tangenten einander parallel, so sind die Kegelschnitte für den Convergenzpunkt dieser Tangenten perspektivisch collineär (§. 122). Weil aber dieser Convergenzpunkt im unendlichen Raum liegt, so gehört die Collineation zur besondern Art der Affinität. Haben zwei gleichartige Kegelschnitte einen Durchmesser gemeinschaftlich, so sind sie für die Richtung dieses Durchmessers als Axe perspektivisch collineär (§. 121), folglich sind auch die in dem Mittelpunkt vereinigten Punkte der zwei collineären Systeme homolog, und es gehört also diese Collineation zur besondern Art der Affinität.

M. Aehnliche Kegelschnitte.

§. 135. Kegelschnitte, welche gleiche Excentricitäten haben, sind ähnlich; ihre Mittelpunkte, Axen, Brennpunkte, sind homolog. Wenn die Haupt-Axen zweier ähnlichen Kegelschnitte parallel sind, so befinden sie sich überdiess in perspektivischer Lage. Aehnliche Kegelschnitte perspektivischer Lage sind noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Sie haben stets zwei gemeinschaftliche Vielstrahlen gleichartiger Lage, deren Scheitel die Aehnlichkeitspunkte ihrer Collineation sind. Diese Aehnlichkeitspunkte liegen mit den Mittelpunkten der Kegelschnitte in einer Richtung und trennen dieselben harmonisch.

b) Sie haben im endlichen Raum nur eine gemeinschaftliche Sekante, und können einander also höchstens in zwei Punkten schneiden. Diese gemeinschaftliche Sekante des endlichen Raumes liegt in der Mitte zwischen den zwei Polaren, welche einem ihrer Aehnlichkeitspunkte in den einzelnen Kegelschnitten entsprechen.

c) Wenn drei ähnliche Kegelschnitte paarweise perspektivisch gegen einander liegen, so liegen auch von ihren Aehnlichkeitspunkten je drei

ungleichnamige in einer geraden Linie, so dass die Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahlen haben.

d) Wenn von drei ähnlichen und perspektivisch gegen einander liegenden Kegelschnitten einer die zwei anderen berührt, so ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte des ersteren ein Aehnlichkeitsstrahl der zwei letzteren.

e) Wenn drei ähnliche Kegelschnitte paarweise perspektivisch gegen einander liegen, so convergiren ihre drei gemeinschaftlichen Sekanten des endlichen Raumes in einem Punkt.

f) Kreise sind nicht nur alle ähnlich, sondern sie befinden sich auch stets in perspektivischer Lage, und dieses ist also der Grund derjenigen Eigenschaften, die unter dem Namen der Aehnlichkeit und Potenzialität früher an ihnen erkannt worden sind.

Damit zwei Kegelschnitte ähnlich seien, ist ebenfalls die Bedingung nothwendig, dass sie gleicher Art seien (§. 51, c), aber diese Bedingung ist allein noch nicht hinreichend. Es müssen aus dem gleichen Grund wie bei den affinen Kegelschnitten auch die Mittelpunkte homolog sein, aber noch mehr: man kann nicht zwei beliebige Durchmesser zur collineären Beziehung ihrer Aehnlichkeit annehmen. Denn gesetzt, es seien d und d′ zwei solche Durchmesser, so sind auch die Endpunkte derselbsn und folglich auch die Tangenten dieser Endpunkte homolog. In ähnlichen Systemen ist aber der Winkel, den zwei Gerade des einen Systems machen, dem Winkel gleich, welchen die homologen Geraden des andern Systems mit einander machen. Sollen also zwei Durchmesser d und d′ zweier ähnlichen Kegelschnitte homolog sein, so müssen auch die Winkel, welche ihre Endestangenten mit ihnen machen, einander gleich sein. Nun stehen aber im Allgemeinen die Durchmesser schief auf ihren Endestangenten und nur die Axen stehen senkrecht auf denselben, es müssen also jedenfalls die Axen zwei homologe Linien sein. Um nun aber auch die übrigen Durchmesser von diesem Standpunkte aus beurtheilen zu können, betrachte man die Fig. 60, in welcher zu dem Brennpunkt F″ die Direktrize $\alpha\gamma'$ gezeichnet ist, die mit der Polaren des Punktes F″ zusammenfällt. Dort ist bei der Col-

lineation des Kegelschnitts mit dem Leitkreis F' die Richtung des Durchmessers OC, der Geraden DC' collineär, welche durch den Brennpunkt F'' geht und mit ihr auf der Direktrize in einem Punkte γ' convergirt, zugleich steht aber auch die Tangente $C\gamma$ des Endpunktes C des Durchmessers auf $F''\gamma'$ senkrecht, und es ist der Winkel $\gamma'CD$ der Ergänzung des Winkels $O\gamma'F''$ zu einem Rechten gleich. Soll nun dieser Kegelschnitt AB𝔄 einem andern Kegelschnitt K' ähnlich sein, so muss nicht nur die Axe A𝔄 dieses Kegelschnitts der Axe des Kegelschnitts K' entsprechen, sondern es muss auch der Durchmesser OC des Kegelschnitts AB𝔄 demjenigen Durchmesser des Kegelschnittes K' entsprechen, der unter einem Winkel zur Axe geneigt ist, der so gross ist, als der Winkel COA; es muss ferner der Winkel, den die Endestangenten dieser Durchmesser mit diesen Durchmessern machen, in beiden Kegelschnitten gleich sein, und folglich müssen auch die Winkel einander gleich sein, welchen die Durchmesser mit den Geraden, die von den Brennpunkten ausgehen und auf den Direktrizen mit ihnen convergiren, und deren einer im Kegelschnitt AB𝔄 durch den Winkel $O\gamma'F''$ dargestellt ist. Es muss also das Dreieck $OF''\gamma'$ in dem Kegelschnitt AB𝔄 dem entsprechenden Dreieck in dem Kegelschnitt K' ähnlich sein. Weil nun aber ohnehin das Dreieck $O\alpha\gamma'$ des Kegelschnittes AB𝔄 dem entsprechenden Dreieck des Kegelschnittes K' ähnlich ist, so folgt, dass das Verhältniss $OF'' : O\alpha$ in dem Kegelschnitt AB𝔄 so gross sein muss, als das Verhältniss der entsprechenden Abschnitte des andern Kegelschnittes (§. 51). Nun ist aber $OF'' : OA = OA : O\alpha$ oder $OF'' \,.\, O\alpha = OA^2$ folglich wenn man mit $O\alpha^2$ dividirt

$$OF'' : O\alpha = OA^2 : O\alpha^2$$

Es ist aber $OA : O\alpha$ der Excentricität e des Kegelschnitts gleich und folglich $OF'' : O\alpha = e^2$. Sollen also jene Verhältnisse einander gleich sein, so müssen auch die Quadrate und folglich auch die einfachen Excentricitäten der Kegelschnitte gleich sein. Es folgt hieraus, dass zwei Kegelschnitte nur ähnlich sein können, wenn ihre Excentricitäten gleich sind. Nun kann man

natürlich auch umgekehrt schliessen, dass zwei Kegelschnitte ähnlich sind, sobald sie gleiche Excentricitäten haben. Weil aber in solchen Kegelschnitten das Verhältniss $OF'' : OA$ constant ist und die Punkte O und A homologe Punkte der ähnlichen Systeme sind, so folgt, dass auch die Brennpunkte homolog sind. Zwei ähnliche Kegelschnitte befinden sich in perspektivischer Lage, sobald ihre Hauptaxen parallel sind, denn offenbar sind alsdann auch ihre zweiten Axen, die auf jenen senkrecht stehen, parallel, und diese zwei Paare ihrer homologen Richtungen bestimmen die Lage ihrer Collineationsaxe, welche, wegen des Parallelismus derselben, im unendlichen Raume liegt. Diese Collineationsaxe des unendlichen Raumes ist eine gemeinschaftliche Sehne der zwei ähnlichen Kegelschnitte, und diese Kegelschnitte haben also noch eine zweite Sehne AB (Fig. 77) und zwei Vielstrahlen O und 𝔒 gleichartiger Lage im unendlichen Raum gemeinschaftlich (§. 123). Die Pole der gemeinschaftlichen Sehne 𝔄𝔅 des unendlichen Raumes sind die Mittelpunkte M und M' der zwei Kegelschnitte (§. 107, c). Es liegen also diese Mittelpunkte mit den Scheiteln O und 𝔒 der gemeinschaftlichen Vielstrahlen in einer Richtung und trennen dieselben harmonisch (§. 121, a). Weil sodann die Kegelschnitte nur eine Sehne AB im endlichen Raum gemeinschaftlich haben, so können sie sich höchstens in zwei reellen Punkten schneiden. Auch die gemeinschaftlichen Sehnen AB und 𝔄𝔅 werden durch die zwei Polaren rs und r's', welche einem der Aehnlichkeitspunkte O entsprechen, harmonisch getrennt (§. 122, a), weil aber von diesen vier Richtungen eine, nämlich 𝔄𝔅, ganz im unendlichen Raum liegt, so sind sie einander parallel, und es muss AB in der Mitte zwischen rs und r's' liegen, denn diese vier Richtungen theilen ja jede Transversale in einer harmonischen Reihe rAr'𝔄, und weil 𝔄 im unendlichen Raum liegt, so muss A zwischen r und r' in der Mitte liegen.

Hat man drei Kegelschnitte, welche paarweise perspektivisch liegen, so ist die Lage der Centra O und 𝔒, Q und 𝔔, P und 𝔓 einem sehr einfachen Gesetz unterworfen. Da

nämlich diese perspektivischen Collineationssysteme eine und dieselbe Collineationsaxe, nämlich eben die Richtung 𝔄𝔅 des unendlichen Raumes gemeinschaftlich haben, so folgt nach §. 49, b, dass die Centra je zu dreien in einer Richtung liegen und dass die drei Systeme also vier gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahlen haben. Wenn nun einer dieser Kegelschnitte M'' die zwei anderen in den Punkten C und C' berührt, so sind diese Punkte die Scheitel ihrer gemeinschaftlichen Vielstrahlen (§. 124, a), sie liegen also mit dem Scheitel O des gemeinschaftlichen Vielstrahls der berührten Kegelschnitte in einer Richtung. Wenn nun aber die Punkte C und C' auf einem Strahl des Vielstrahls O liegen, so sind sie homologe Punkte der perspektivischen Collineation der berührten Kegelschnitte M und M'; die Tangenten der Punkte C und C' convergiren also in einem Punkt γ der Axe AB. Diese Tangenten $C\gamma$ und $C'\gamma$ sind aber auch die gemeinschaftlichen Sehnen zwischen dem Kegelschnitt M'' und den Kegelschnitten M und M' (§. 124, a). Es convergiren also die drei gemeinschaftlichen Sehnen der drei Kegelschnitte in einem Punkt γ. Diese Eigenschaft ist nicht blos auf den Fall beschränkt, wo einer der Kegelschnitte die zwei anderen berührt, sondern er hat allgemeine Gültigkeit. Um das einzusehen, kann man zuerst einen vierten Kegelschnitt 𝔐'' in's Auge fassen, der den Kegelschnitt M auch in dem Punkt C berührt, dagegen aber den Kegelschnitt M' in zwei Punkten E' und F' schneidet. Alsdann sind M', 𝔐'' und M'' drei Kegelschnitte, von welchen M'' die zwei anderen M' und 𝔐'' berührt. Man hat also den Fall vor sich, für welchen man schon erkannt hat, dass die drei gemeinschaftlichen Sekanten $C\gamma$, $C\gamma'$ und E'F' in einem Punkt γ convergiren. Diess ist aber derselbe Punkt, in welchem auch AB convergirt. Man schliesst hieraus, dass die gemeinschaftlichen Sekanten solcher Kegelschnitte in einem Punkte convergiren, wenn nur zwischen einem Paar derselben ein Berühren Statt findet. Nun kann man endlich auch noch einen fünften Kegelschnitt 𝔐'' zeichnen, welcher sowohl den Kegelschnitt M' in zwei Punkten E' und F', als auch den Kegel-

schnitt M in zwei Punkten G und H schneidet. Dann sind aber M′, M″ und m″ drei solche Kegelschnitte, zwischen welchen eine einzige Berührung Statt findet und deren gemeinschaftliche Sekanten also in einem Punkt γ convergiren. In diesem Punkt γ convergirt aber auch die gemeinschaftliche Sekante AB; man sieht also, wenn drei ähnliche Kegelschnitte perspektivisch liegen und sich in ganz beliebigen Punkten durchschneiden, dass doch auch ihre drei gemeinschaftlichen Sekanten des endlichen Raumes in einem Punkte convergiren.

Man wird die Uebereinstimmung dieser Eigenschaften mit denjenigen der Kreise nicht übersehen. Diese Uebereinstimmung ist aber keine zufällige. Denn Kreise sind offenbar ähnliche Kegelschnitte, als Kegelschnitte, deren Excentricität gleich Null ist. Die Kreise haben aber noch das Auszeichnende, dass sie immer perspektivisch liegen, weil man jeden ihrer Durchmesser als Axe betrachten kann. Und nun ist es klar, dass alle Kreise einer Ebene, wie sie auch gegen einander liegen, an den Eigenschaften Theil nehmen, welche sonst blos den ähnlichen und perspektivisch liegenden Kegelschnitten zukommen. Und man wird jetzt die unter dem Namen der Aehnlichkeit und Potenzialität aufgeführten Eigenschaften recht verstehen, wenn man bemerkt, dass die Aehnlichkeit nichts Anderes ist, als die perspektivische Collineation der Kreise für ihre unendlich entfernte gemeinschaftliche Sehne und die Potenzialität nichts Anderes, als die perspektivische Collineation für ihre gemeinschaftliche Sehne des endlichen Raumes. Hiemit ist man auf dem Wege der Erforschung der Collineationsverhältnisse der Kegelschnitte wieder bei dem besondern Falle der Kreise angelangt, der zum Ausgangspunkt gedient hat, und damit sind jene allgemeinen Untersuchungen geschlossen. Es bleibt jetzt nur noch die Aufgabe, die besonderen Eigenschaften aufzusuchen, durch welche sich die Arten der Kegelschnitte von einander unterscheiden, und diess soll in den drei folgenden Büchern geschehen.

Zehntes Buch.

Die Ellipse.

A. Gestalt der Ellipse im Allgemeinen.

§. 136. Der Umfang der Ellipse ist eine in sich geschlossene Curve des endlichen Raumes, welche die Ebene, in der sie liegt, in zwei Theile theilt. Die endliche Fläche, welche sie umschliesst, ist die Oberfläche der Ellipse, während die unendliche Fläche, von der sie umgeben wird, als ausserhalb der Ellipse liegend betrachtet wird.

Jede Sehne, welche zwei Punkte ihres Umfangs mit einander verbindet, liegt mit allen Punkten ihrer Ausdehnung in der Ellipsenfläche. Die Ellipse hat also nur Sehnen gleicher Art.

Die Ellipse geht aus einer solchen Collineation mit dem Kreise hervor, bei welcher die Gegenaxe in dem System des Kreises ausserhalb der Fläche eben dieses Kreises liegt. Die Ellipse hat daher die Gestalt einer ganz im endlichen Raum liegenden, in sich selbst zurückkehrenden Curve (§. 100). Diese Gestaltsverhältnisse sind besonders anschaulich, wenn man die Collineation mit ihrem Leitkreis in's Auge fasst. Man weiss aus §. 100, dass jede Ellipse aus solchen Leitkreisen entwickelt wird, die zum Mindesten einen inneren Aehnlichkeitspunkt haben, zu welchem die Ellipse gehört. Sind nun F′ und F″ (Fig. 59, a) die zwei Leitkreise und O′ derjenige innere Aehnlichkeitspunkt, zu welchem die Ellipse AB𝔄𝔅 gehört, so ist die Ellipse dem Leitkreis O′ für die Potenzlinie $\alpha\gamma$ als Axe und dem Mittelpunkt F′ als Centrum colli-

neär, und die Polare $a'c'$, welche dem Punkt O' im Kreis F' als Polare entspricht, ist die Gegenaxe der Collineation im System des Kreises F' (§. 87 u. 89). Weil nun die Gegenaxe als Polare des inneren Punktes O' ausserhalb des Leitkreises liegt, so hat sie mit der homologen, unendlich entfernten Geraden im Systeme der Ellipse eine gleichartige Lage gegen das Centrum O' und die Axe $\alpha\gamma$ der Collineation. Die Collineation der Ellipse mit ihrem Leitkreis ist also durch eine einstimmige Lage ihrer homologen Elemente ausgezeichnet (§. 47, a). Wenn also ein Punkt C' des Leitkreises auf der endlichen Strecke zwischen dem Centrum F' und der Axe $\alpha\gamma$ liegt, so muss auch der homologe Punkt C der Ellipse auf eben dieser Strecke liegen, wenn ein anderer Punkt auf der über F' hinausgehenden rückgängigen Verlängerung einer solchen Strecke liegen sollte, so liegt auch der homologe Punkt der Ellipse auf derselben, und wie alle Punkte des Kreises im endlichen Raum liegen, so liegen auch alle homologen Punkte der Ellipse im endlichen Raum und diese ist eine in sich geschlossene Curve des endlichen Raumes.

Die Richtung jedes Collineationsstrahls, d. i. jeder Halbmesser des Kreises F' bezeichnet auf den collineären Curven homologe Punkte C und C', und weil der Kreis nicht von der Gegenaxe geschnitten wird, so sind auch alle Punkte der endlichen Strecke eines Kreishalbmessers F'C' den Punkten der endlichen Strecke F'C im System der Ellipse homolog. Es ist also die endliche Fläche, welche von der Ellipse umschlossen wird, der Kreisfläche homolog, und erstere muss also als die Oberfläche der Ellipse betrachtet werden. Ebenso sind die unendlichen Räume, welche die Ellipse und den Kreis umgeben, homolog, und bilden diejenigen Theile, welche ihre äusseren Punkte enthalten.

B. Brennpunkte der Ellipse.

§. 137. Die zwei Brennpunkte liegen innerhalb der Ellipse, und mit dieser Lage hängen noch folgende Eigenthümlichkeiten zusammen.

a) Die Entfernung der Brennpunkte ist kleiner als die Hauptaxe.

b) Die Excentricität der Ellipse ist kleiner als Eins.

c) Die Direktrizen liegen ausserhalb der Ellipse, und das constante Verhältniss, welches zwischen einem Brennstrahl eines Punktes der Peripherie und seiner Entfernung von der zugehörigen Direktrize stattfindet, ist ebenfalls kleiner als Eins.

d) Die Summe der zwei Brennstrahlen eines Punktes des Ellipsen-Umfanges ist der Axe gleich.

e) Der Kreis ist eine Ellipse, deren Direktrize im unendlichen Raum liegt, und deren Excentricität gleich Null ist.

Es hat sich im vorausgehenden Abschnitt gezeigt, dass bei der Collineation der Ellipse mit ihren Leitkreisen allen inneren Punkten eines Leitkreises wieder inneren Punkte der Ellipse entsprechen; es ist jeder Brennpunkt zugleich ein Mittelpunkt des Leitkreises und das Centrum der Collineation, er vereinigt also zwei homologe Punkte der Systeme; daraus folgt, dass jeder Brennpunkt, wie er im Leitkreis liegt, auch in der Ellipsenfläche liegen muss. Es ist also die Entfernung $F'F''$ (Fig. 59, a) der zwei Brennpunkte kleiner, als die Axe $A\mathfrak{A}$, auf welcher sie liegen, und die Excentricität $F'F'' : A\mathfrak{A} < 1$.

Liegen aber die Brennpunkte in der Ellipse, so liegen die Direktrizen als die Polaren der Brennpunkte ausserhalb derselben, und das constante Verhältniss der Entfernungen, in welchen ein Punkt des Umfanges von einem Brennpunkt und der zugehörigen Direktrize absteht, ist also ebenfalls kleiner als Eins (§. 99, a).

Beschreibt man mit der Axe $A\mathfrak{A}$ aus einem Brennpunkt F' (Fig. 60, a) einen Kreis, so ist diess ein solcher Leitkreis des Kegelschnitts, dessen zugehöriger zweiter Leitkreis auf einen Punkt F'' reducirt ist (§. 97). Da nun aber dieser Punkt F'' bei der Ellipse in dem Leitkreis F' liegt (§. 100), so muss auch jeder Kreis, welcher den Kreis F' berührt und durch den Punkt F'' geht, in dem Leitkreis liegen, und weil der Mittelpunkt dieses Berührungskreises C mit dem Berührungspunkt C' und dem Mittelpunkt F'' in einer geraden Richtung liegt, so folgt, dass $FC + CC' = F'C' = A\mathfrak{A}$, und weil dieser Berührungskreis zugleich durch den zweiten Brennpunkt F''

geht, so folgt, dass $CC' = F''C'$. Es ist also auch $F'C + F''C' = A\mathfrak{A}$.

Weil der Mittelpunkt C dieses Berührungskreises ein Punkt auf dem Umfang der Ellipse ist, so folgt, dass die Summe der Brennstrahlen, welche an einen Punkt des Ellipsenumfanges gezogen werden, der Hauptaxe gleich ist.

Eine besondere Gestalt hat diejenige Ellipse, deren Direktrize im unendlichen Raum liegt. Die Brennpunkte einer solchen Ellipse fallen mit dem Mittelpunkt zusammen (§. 107, c), da der Brennpunkt der Pol der zugehörigen Direktrize ist (§. 113, a). Es ist also in einer solchen Ellipse die Excentricität $F'F'' : A\mathfrak{A} = 0 : A\mathfrak{A} = 0$, und das constante Verhältniss der Entfernungen, in welchen ein Punkt des Umfangs zu einem Brennpunkt und der zugehörigen Direktrize steht, lehrt, dass in einer solchen Ellipse alle Brennstrahlen einander gleich sind, sofern die Brennstrahlen sich hienach verhalten müssen, wie die Entfernungen, in welchen ihre Endpunkte von der Direktrize stehen und welche als unendliche Grössen einander gleich sind. Die in Rede stehende Ellipse ist also ein Kreis.

C. Mittelpunkt der Ellipse.

§. 138. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt in der Ellipse im endlichen Raum. Diese Lage des Mittelpunktes verleiht den Durchmessern folgende Eigenthümlichkeit:

Die conjugirten Durchmesser einer Ellipse bilden einen involutorischen Vielstrahl einstimmiger Aufeinanderfolge. Die Axe der Ellipse bilden die Normalstrahlen dieses Vielstrahls; Hauptstrahlen existiren nicht.

Der Mittelpunkt der Ellipse ist dem Aehnlichkeitspunkt O′ der Leitkreise homolog, und wie dieser in der Fläche der Leitkreise liegt, so liegt auch der Mittelpunkt der Ellipse innerhalb derselben. Mit dieser Lage des Mittelpunkts ist eine einstimmige Aufeinanderfolge der conjugirten Durchmesser verbunden (§. 111, a und §. 112, d).

D. Axen der Ellipse.

§. 139. Die zweite Axe der Ellipse ist stets kleiner als die Hauptaxe; man heisst daher die letztere die g r o s s e und die erstere die

kleine Axe. Die Axen der Ellipse zeigen noch folgende bemerkenswerthe Beziehungen der Grösse:

a) Die grosse Axe, die kleine Axe, und die Entfernung der Brennpunkte, haben eine solche Grösse, dass sie ein rechtwinkliges Dreieck mit einander bilden können. Die Entfernung eines Brennpunkts von einem Endpunkt der kleinen Axe ist also der halben grossen Axe gleich.

b) Die halbe kleine Axe ist das geometrische Mittel zwischen den zwei Abschnitten, welche ein Brennpunkt auf der grossen Axe bildet.

c) Die halbe kleine Axe ist auch das geometrische Mittel zwischen den zwei Senkrechten, welche man von den Brennpunkten auf eine beliebige Tangente der Ellipse fällt.

d) Der Hauptparameter ist die dritte Proportionale zur grossen und kleinen Axe.

e) Wenn man von einem Punkt des Umfanges eine Gerade so zieht, dass das Stück, das zwischen diesem Punkt und der Richtung der grossen Axe liegt, der halben kleinen Axe gleich ist, so ist das Stück, welches zwischen eben jenem Punkt und der Richtung der kleinen Axe liegt, der grossen Axe gleich.

f) Die Quadratsumme zweier beliebigen conjugirten Durchmesser, ist der Quadratsumme der zwei Axen gleich.

Die kleine Axe B𝔅 halbirt die Entfernung der Brennpunkte F′F″ (Fig. 78), es sind also die Brennstrahlen des Punktes B der kleinen Axe einander gleich, $BF' = BF''$, da aber nach §. 137, d $BF' + BF'' = A\mathfrak{A}$, so folgt, dass $BF' = \frac{1}{2} A\mathfrak{A}$. Die halbe kleine Axe OB, die halbe Entfernung der Brennpunkte und die halbe grosse Axe haben also die Fähigkeit, ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, die Ganzen dieser Stücke werden also dieselbe Fähigkeit besitzen.

Construirt man über der grossen Axe A𝔄 als Durchmesser einen Kreis, zieht durch den Endpunkt B der kleinen Axe eine Tangente, welche jenen Kreis in dem Punkte C′ schneidet und errichtet nun in dem Punkte C′ wieder eine Senkrechte, so geht dieselbe durch einen Brennpunkt der Ellipse (§. 131). Es ist aber dieser Construktion gemäss OBC′F′ ein Rechteck, und folglich $F'C' = OB$. Nun weiss man aus der Kreislehre, dass F′C′ das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten AF′ und 𝔄F′ ist, es muss also auch die halbe kleine Axe das

geometrische Mittel zwischen den Abschnitten sein, welche ein Brennpunkt auf der grossen Axe bildet, oder $OB^2 = AF' . AF''$.

Wenn man aber auch (Fig. 79) eine ganz beliebige Tangente ED an die Ellipse zieht, und in ihren Schnittpunkten E und D mit der Kreislinie Senkrechte EH und DG errichtet, so gehen sie durch die Brennpunkte F' und F'' der Ellipse (§. 131). Auch sieht man leicht, dass in dem Rechteck EDGH die Gerade F'F'', welche durch den Mittelpunkt des Rechtecks geht, gleiche Abschnitte $F'G = EF''$ bildet, es ist also

$F''E . F'D = F'G . F'D = AF' . \mathfrak{A}F' = OB^2$ (§. 139, b).

Diese Formel schliesst eine Erweiterung des vorausgehenden Satzes ein. Der über der Axe A𝔄 construirte Kreis hat für die Ellipse noch eine ganz besondere Bedeutung, insofern er ihr affin ist (§. 134, c), und weil unter allen Kegelschnitten die Ellipse allein in diesem Verhältniss zum Kreise stehen kann. Vermöge dieser Affinität ist in Fig. 78

$$F'C : F'C' = OB : OB'$$

oder weil nach dem Vorausgehenden $F'C' = OB$, und als Kreishalbmesser $OB' = OA$, so folgt $F'C : OB = OB : OA$. Diess zeigt, dass der Parameter die dritte geometrische Proportionale zur grossen und kleinen Axe ist.

Eine andere für die Construction der Ellipse wichtige Eigenschaft ergibt sich aus ihrer Affinität mit dem Kreis, wenn man aus einem beliebigen Punkt C (Fig. 80) des Umfanges, die halbe kleine Axe so aufträgt, dass der andere Endpunkt D in die Richtung der grossen Axe fällt. Die Richtung dieser Strecke CD schneidet die kleine Axe in einem Punkte E. Zieht man nun durch C eine Senkrechte $C\gamma$ auf die grosse Axe, um auch in dem Kreis den Punkt C' zu finden, der dem Punkt C homolog ist, und zieht man den Halbmesser OC' des Kreises, so ist nach den Gesetzen der Affinität

$$\gamma C : \gamma C' = OB : OB',$$

oder weil $CD = OB$ nach Construction, und $OB' = OC'$ als Halbmesser eines Kreises, auch

$$\gamma C : \gamma C' = CD : C'O.$$

Es ist also $CD \parallel OC'$ und weil auch $CC' \parallel OB$ nach Construction, so folgt $CE = OC' = OA$.

Diese Beweisführung setzt voraus, dass $CD = OB$ auf der Seite des Mittelpunktes O liege. Nimmt man es aber auf der anderen Seite, und bestimmt dadurch die Punkte D′ und E′, so wird man leicht sehen, dass die Dreiecke DCD′ und ECE′ gleichschenklig sind, und dass also auch hier $CE' = CE = OA$.

Nimmt man also auf einer Geraden von einem Punkt C aus noch zwei den Halbaxen einer Ellipse gleiche Abschnitte CE und CD in einer Richtung und bewegt die Gerade so, dass die Endpunkte D und E der Differenz dieser Abschnitte stets mit zwei unter sich senkrechten Geraden A𝔄 und B𝔅 in Verbindung bleiben, so beschreibt der Punkt C eine Ellipse, deren Axen den Abschnitten CE und CD gleich kommen. Trägt man die Abschnitte nach entgegengesetzten Richtungen auf, so beschreibt der Punkt C dieselbe Ellipse, wenn die Endpunkte D′ und E′ mit den zwei Senkrechten in Verbindung bleiben.

Endlich gibt die Affinität der Ellipse mit dem Kreis auch einen Aufschluss über die Grösse der conjugirten Durchmesser. Sind nämlich Cℭ und D𝔇 (Fig. 81) zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse, über deren Axen A𝔄 und B𝔅 als Durchmesser Kreise beschrieben sind, so findet man die homologen Durchmesser im affinen Kreis A𝔄, wenn man durch die Endpunkte C und D die Collineationsstrahlen zieht, welche auf A𝔄 senkrecht stehen und den Kreis A𝔄 in den homologen Punkten C′ und D′ schneiden. Die Durchmesser C′ℭ′ und D′𝔇′ des Kreises, welche den Durchmessern Cℭ und D𝔇 der Ellipse homolog sind, sind wie jene einander conjugirt (§. 120, c), und stehen also senkrecht aufeinander (§. 112, c). Die Seiten der Dreiecke OC′c und OD′d stehen also einzeln senkrecht aufeinander, haben somit beziehlich gleiche Winkel und sind, weil $OC' = OD'$, congruent. Es ist also $Oc = D'd$, $C'c = Od$. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck OC′c nach dem pythagoräischen Lehrsatz $Oc^2 + C'c^2 = OC'^2$
folglich ist auch, wenn man substituirt:

$$Oc^2 + Od^2 = OA^2$$

Ganz auf die gleiche Weise findet man, wenn man in dem Kreis, der über B𝔅 beschrieben ist, die homologen Durchmesser construirt, und die Collineationsstrahlen Cc' und Dd' zieht, dass $$Oc'^2 + Od'^2 = OB^2$$
folglich wenn man diese zwei Gleichungen addirt, und bemerkt dass $$Oc^2 + Oc'^2 = OC^2,\ Od^2 + Od'^2 = OD^2$$
$$Oc^2 + OD^2 = OA^2 + OB^2.$$

E. Oberfläche der Ellipse.

§. 140. In Betreff der Flächenräume ist die Ellipse durch folgende Merkmale ausgezeichnet.

a) Die Oberfläche der Ellipse verhält sich zu dem über einer Axe als Durchmesser construirten Kreis, wie die conjugirte Axe zu dem Durchmesser des Kreises. In demselben Verhältnisse stehen auch jeder Abschnitt und Ausschnitt der Ellipse zu dem Abschnitt und Ausschnitt im Kreis, welcher ihnen vermöge der Affinität der Curven entspricht.

b) Auch wenn man über einem beliebigen Durchmesser der Ellipse einen Kreis construirt, so ist das Verhältniss der Oberflächen dieser Curven, oder das Verhältniss homologer Stücke derselben, dem Modulus ihrer Affinität gleich.

c) Wenn man die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser mit einander verbindet, so entsteht ein Parallelogramm von constanter Grösse. Ebenso hat auch ein Parallelogramm, das einer Ellipse umbeschrieben ist, eine constante Grösse.

Die Affinität der Ellipse AB𝔄𝔅 mit einem über einer ihrer Axen als Durchmesser construirten Kreise AB'𝔄𝔅' (Fig. 85) gibt auch ein Mittel für die Berechnung ihrer Oberfläche; denn nach §. 52, c verhält sich
$$AB\mathfrak{A}\mathfrak{B} : AB'\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = OB : OB' = OB : OA$$
das gleiche Verhältniss haben auch die homologen Abschnitte und Ausschnitte
$$CA\mathfrak{C} : C'A\mathfrak{C}' = OB : OA$$
$$O\mathfrak{C}C : O\mathfrak{C}'C' = OB : OA.$$
Den gleichen Dienst leistet auch die Affinität der Ellipse mit einem Kreis der über einem beliebigen Durchmesser a𝔞 construirt ist (§. 134, b). Verbindet man hier den Endpunkt

b' des Kreisdurchmessers $b'\mathfrak{b}'$ (Fig. 84), welcher auf $a\mathfrak{a}$ senkrecht steht, mit dem Endpunkt b des Durchmessers $b\mathfrak{b}$, welcher in der Ellipse dem Durchmesser $a\mathfrak{a}$ conjugirt ist, durch eine Gerade bb', so gibt sie die Richtung der Collineationsstrahlen, und wenn diese Richtung die Axe $a\mathfrak{a}$ in einem Punkt β schneidet, so ist das Verhältniss $b\beta : b'\beta$ der Abschnitte dem Modulus der Affinität gleich. Wenn also $c\mathfrak{c}$ und $c'\mathfrak{c}'$ homologe Sehnen sind, so verhält sich, wenn $b\mathfrak{p} \perp a\mathfrak{a}$

$$ab\mathfrak{a}\mathfrak{b} : ab\mathfrak{a}\mathfrak{b}' = ca\mathfrak{c} : c'a\mathfrak{c}' = b\beta : b'\beta = b\mathfrak{p} : ob' = b\mathfrak{p} : oa.$$

Ist endlich $CD\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ (Fig. 82) ein Parallelogramm, welches die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser verbindet, so entspricht demselben im affinen Kreis ein Quadrat $C'D'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$. Dieses Parallelogramm und das Quadrat im Kreis haben daher ebenfalls ein constantes Verhältniss, welches dem Modulus der Affinität gleich ist. Weil nun alle in den Kreis inbeschriebenen Quadrate einander gleich sind, so müssen auch die affinen Parallelogramme, welche zu conjugirten Durchmessern gehören, einander gleich sein. Ebenso schliesst man auch hinsichtlich der umbeschriebenen Parallelogramme.

Eilftes Buch.

Die Hyperbel.

A. Gestalt der Hyperbel im Allgemeinen.

§. 141. Der Umfang der Hyperbel ist eine Curve, welche aus zwei ausser einander liegenden, beiderseits in's Unendliche sich verlaufenden Aesten besteht. Die Hyperbelcurve theilt daher die Ebene, in der sie liegt, in drei Felder ab: das Feld, das zwischen den zwei getrennten Aesten liegt, ist das äussere Feld, die zwei anderen Felder, von welchen jedes von einem Hyperbelast begrenzt ist, sind die inneren Felder der Hyperbel und machen die eigentliche Hyperbelfläche aus.

Demgemäss gibt es auch zweierlei Sehnen der Hyperbel, innere und äussere. Eine innere Sehne verbindet zwei Punkte eines und desselben Hyperbelastes, eine äussere Sehne verbindet einen Punkt des einen Astes mit einem Punkt des andern Astes.

Die Hyperbel geht aus einer solchen Collineation mit dem Kreis hervor, bei welcher die Gegenaxe in dem System des Kreises eben diesen Kreis in zwei Punkten durchschneidet. Sie selbst hat daher die Gestalt von zwei im endlichen Raum ausser einander liegenden und einander gegenüberstehenden Aesten, welche nur in zwei Punkten des unendlichen Raumes mit einander zusammenhängen (§. 101). Hiedurch gewinnt diese Curve eine so eigenthümliche Gestalt, dass es wünschenswerth wird, die Entwicklung der Hyperbel im Einzelnen zu verfolgen. Es soll daher der Collineation dieser Curve noch eine besondere Betrachtung gewidmet werden, wobei der einfachste Fall, die perspektivische Collineation mit ihren Leit-

kreisen zum Anhaltspunkt dienen kann. Die Hyperbel hat aber nach §. 101 solche Leitkreise, die wenigstens einen Aehnlichkeitspunkt haben, der ausserhalb der Fläche derselben liegt. Sind nun MA𝔐 und 𝔄𝔊 die zwei Aeste einer Hyperbel, F′ und F″ die zwei Leitkreise, aus denen sie entwickelt wird, und gehört sie zum äusseren Aehnlichkeitspunkt O′ derselben (Fig. 86), der durch die gemeinschaftlichen Tangenten P′P″ und 𝔓′𝔓″ bestimmt wird, so ist die Hyperbel jedem der Leitkreise collineär: der Mittelpunkt des Leitkreises F′ ist das Centrum für die Collineation mit eben diesem Kreis, die Polare P′𝔓′ des Aehnlichkeitspunktes O′ ist die Gegenaxe im System des Kreises F′ (§. 89, f); diese Gegenaxe P′𝔓′ liegt aber auf der Verlängerung der Strecke F′F″ (wenn der extreme Fall gleich grosser Leitkreise ausgeschlossen wird), die Collineationsaxe $\alpha\gamma$, welche zugleich die Potenzlinie der zwei Leitkreise ist, liegt zwischen den Punkten F′ und F″. Es folgt hieraus, dass die Gegenaxe P′𝔓′ ebenso wie ihre unendlich entfernte Gerade im System der Hyperbel ausserhalb des Raumes liegt, welcher sich zwischen dem Centrum F′ und der Axe $\alpha\delta$ sich ausbreitet, und dass also die Collineation durch eine einstimmige Aufeinanderfolge ihrer homologen Elemente ausgezeichnet ist (§. 47, a).

Bei dieser einstimmigen Collineation müssen die Hyperbeläste mit ihren homologen Kreisbögen eine gleichartige Lage gegen das Centrum und die Axe der Collineation haben. Es muss also der Hyperbelast MA𝔐, welcher dem Kreisbogen P′A′𝔓′ homolog ist, wie dieser zwischen dem Centrum F′ und der Axe $\alpha\delta$ liegen, dagegen muss der andere Hyperbelast 𝔄𝔊 welcher dem Kreisbogen P′𝔄′𝔓′ homolog ist, auf der entgegengesetzten Seite der Axe $\alpha\delta$ liegen. Wie nämlich jeder Punkt 𝔊′ dieses Kreisbogens ausserhalb des Raumes liegt, der zwischen F′ und $\alpha\delta$ sich ausbreitet, so muss auch der homologe Punkt 𝔊 im System der Hyperbel ausserhalb dieses Raumes liegen, und weil der Punkt 𝔊′ jenseits der Gegenaxe P′𝔓′ liegt, so muss der homologe Punkt 𝔊 auf der entgegengesetzten Seite der Collineationsaxe liegen. Man sieht hier-

aus, wie die Hyperbel aus zwei Aesten besteht, die durch die Collineationsaxe $\alpha\delta$ getrennt sind und von denen jeder nach zwei Seiten hin in den unendlichen Raum verlauft.

In dem Collineationscentrum F′ sind zwei homologe Punkte der Systeme vereinigt, und jeder Collineationsstrahl bezeichnet auf den zwei Curven auch zwei homologe Punkte M und M′, C und C′, und wenn der Punkt M so liegt, dass der Halbmesser F′M von der Gegenaxe nicht unmittelbar geschnitten wird, so ist er der endlichen Strecke zwischen den homologen Punkten F′ und M im Systeme der Hyperbel homolog; daraus folgt, dass der Kreisabschnitt 𝔓′A′𝔓′ der Hyperbelfläche homolog ist, welche von dem Ast MA𝔐 eingeschlossen wird und das Centrum F′ enthält. Liegt aber ein Punkt 𝔊′ des Kreises auf dem äussern Bogen P′𝔄′𝔓′, so wird der Halbmesser F′𝔊′ von der Gegenaxe durchschnitten, und daraus folgt, dass die endliche Strecke F′𝔊′ demjenigen Stück derselben Richtung zwischen den homologen Punkten F′ und 𝔊 im System der Hyperbel entspricht, welches durch den unendlichen Raum geht. Ist nämlich 𝔤′ der Punkt, in welchem der Halbmesser F′𝔊′ von der Gegenaxe P′𝔓′ geschnitten wird, so entspricht F′𝔤′ der unendlichen Verlängerung von F′𝔊, welche auf der rechten Seite von der Gegenaxe liegt, und das Stück 𝔊′𝔤′ entspricht der unendlichen Verlängerung von F′𝔊, welches links von der Gegenaxe liegt. Die zwei Hyperbeläste begrenzen also zwei unendliche Felder, die keinen Punkt des endlichen Raumes mit einander gemein haben und von welchen der eine dem Kreisabschnitt P′A′𝔓′ und der andere dem Kreisabschnitt P′𝔄′𝔓′ entspricht. Das unendliche Feld, welches zwischen den zwei Hyperbelästen liegt, und welches die Gegenaxe $\alpha\delta$ einschliesst, ist der unendlichen Fläche homolog, welche den Kreis F′ umgibt. Zu einem ähnlichen Resultat gelangt man, wenn man die Collineation der Hyperbel mit dem andern Leitkreis F″ untersucht. Hier ist der Hyperbelast 𝔄𝔊 dem Kreisbogen P″𝔄″𝔓″, und der Hyperbelast MA𝔐 dem Kreisbogen P″A″𝔓″ homolog.

Bei dieser Gestalt der Hyperbel müssen zweierlei Sehnen

unterschieden werden: innere Sehnen, welche wie M𝔐 (Fig. 86) zwei Punkte eines und desselben Astes verbinden, und äussere Sehnen, welche wie M𝔐 (Fig. 87) einen Punkt des einen Astes mit einem Punkte des andern Astes verbinden. Jede innere Sehne M𝔐 der Hyperbel (Fig. 86) ist einer Sehne M'𝔐' des Leitkreises homolog, welche ganz in einem durch die Gegenaxe gebildeten Abschnitte liegt, und alle Punkte dieser zwei endlichen Strecken sind einander homolog. Jede äussere Sehne M𝔐 der Hyperbel (Fig. 87) entspricht einer Sehne M'𝔐' im Kreis, welche von der Gegenaxe durchschnitten wird, und es sind zwei solche Strecken nicht unmittelbar homolog, sondern es ist vielmehr die endliche Strecke des einen Systems der unendlichen Verlängerung der entsprechenden Strecke des anderen Systems homolog.

B. Brennpunkte der Hyperbel.

§. 142. Die zwei Brennpunkte liegen in der Hyperbelfläche, so dass der eine Brennpunkt von dem einen, und der andere von dem anderen Hyperbelast eingeschlossen wird. Mit dieser Lage der Brennpunkte hängen noch folgende Eigenthümlichkeiten der Hyperbel zusammen:

a) Die Entfernung der Brennpunkte ist grösser als die reelle Axe.

b) Die Excentricität der Hyperbel ist grösser als Eins.

c) Die Direktrizen liegen ausserhalb der Hyperbelfläche und das constante Verhältniss, welches zwischen einem Brennstrahl eines Punktes der Peripherie und seiner Entfernung von der zugehörigen Direktrize stattfindet, ist ebenfalls grösser als Eins.

d) Die Differenz der zwei Brennstrahlen eines Punktes der Hyperbelcurve ist der reellen Axe gleich.

Es ist im vorausgehenden Abschnitt bei der Auseinandersetzung der Collineation der Hyperbel mit ihrem Leitkreis gefunden worden, dass der Brennpunkt F' (Fig. 86), welcher zugleich das Collineationscentrum für den Leitkreis F' ist, in der Fläche des Hyperbelastes MA𝔐 liege. Ebenso folgt auch aus der Collineation des anderen Leitkreises F'' mit der Hyperbel, dass der Punkt F'' in der Fläche der Hyperbel liegt,

welche von dem andern Hyperbelast 𝔄𝔊 eingeschlossen wird. Während also die Axe A𝔄 ausserhalb der Hyperbel liegt, liegen die Brennpunkte in der Hyperbelfläche, und also auf der Verlängerung von A𝔄. Es folgt hieraus, dass die Entfernung der Brennpunkte F′F″ grösser ist als die Axe A𝔄, und dass also auch die Excentricität der Hyperbel F′F″ : A𝔄 > 1.

Es folgt daraus, dass auch die Direktrize $\alpha\gamma$ (Fig. 60, b), als die Polare des Brennpunktes F″ ausserhalb der Hyperbelfläche liegt. Auch schliesst man hier ähnlich, wie diess bei Gelegenheit der Ellipse geschehen ist, dass das constante Verhältniss der Entfernungen, in welchen ein Punkt der Peripherie zum Brennpunkt und der zugehörigen Direktrize steht, grösser ist als Eins.

Sind F′ und F″ (Fig. 60, b) die Brennpunkte der Hyperbel und beschreibt man aus F′ einen Kreis mit einem Halbmesser F′A′ = A𝔄, so ist diess ein solcher Leitkreis, der sich ergibt, wenn der andere Leitkreis auf einen Punkt F″ reduzirt wird. Da nun aber F′F″ > A𝔄, so ist auch F′F″ > F′A′. Der Punkt F″, welcher den zweiten Leitkreis vertritt, liegt also ausserhalb des Leitkreises F′. Für diesen Fall zeigt man auf ähnliche Weise, wie bei der Ellipse (§. 137, d), dass die Differenz der Brennstrahlen eines Punktes der Hyperbelcurve der Axe A𝔄 gleich ist.

C. Mittelpunkt der Hyperbel.

§. 143. Der Mittelpunkt der Hyperbel liegt ausserhalb der Hyperbelfläche, und diese Lage des Mittelpunkts verleiht den Durchmessern und Tangenten folgende Eigenthümlichkeiten:

a) Es gibt dreierlei Arten von Durchmessern: reelle, imaginäre und asymptotische. Die r e e l l e n Durchmesser verbinden zwei endliche Punkte des Hyperbelumfanges mit einander, die i m a g i n ä r e n *) liegen ganz ausserhalb der Hyperbel und haben keinen Punkt, weder des endlichen noch des unendlichen Raumes, mit der Hyperbel gemein. Jede

---

*) Diese altherkömmlichen Benennungen sind bei der neueren Anschauung nicht mehr ganz passend. Man würde besser thun, die Prädikate reell und imaginär mit eigentlich und uneigentlich zu vertauschen.

Asymptote berührt die Hyperbel in einem Punkte, der jedoch dem unendlichen Raume angehört. Die Hyperbel hat übrigens nur zwei Asymptoten, welche das Feld der reellen Durchmesser gegen das Feld der imaginären abgrenzen.

b) Die conjugirten Durchmesser einer Hyperbel bilden einen involutorischen Vielstrahl entgegengesetzter Aufeinanderfolge. Die Axen der Hyperbel bilden die Normalstrahlen, und die Asymptoten die Hauptstrahlen dieses involutorischen Vielstrahls. Es wird also jedes Paar conjugirter Durchmesser durch die Asymptoten harmonisch getrennt.

c) Von zwei conjugirten Durchmessern ist immer der eine reell und der andere imaginär. Einem reellen Durchmesser sind nur innere, einem imaginären nur äussere Sehnen conjugirt.

d) Die Hauptaxe der Hyperbel ist reell, die zweite Axe ist imaginär. Die Axen halbiren die Winkel, welche die Asymptoten mit einander machen.

e) Die Tangente, welche einen Hyperbelast berührt, durchschneidet die reelle Axe in einem Punkt, der zwischen dem Scheitel dieses Astes und dem Mittelpunkt der Hyperbel liegt.

Der Mittelpunkt O der Hyperbel ist dem Aehnlichkeitspunkt O′ der Leitkreise homolog (§. 89, d), er ist also auch, wie dieser, ein äusserer und liegt daher zwischen den zwei Hyperbelästen AC und 𝔄ℭ (Fig. 88). Es ist also jeder Durchmesser wie Cℭ eine äussere Sehne der Hyperbel, und ist einer solchen Sehne C′ℭ′ des Leitkreises homolog, welche von der Gegenaxe P′𝔓′ unmittelbar geschnitten wird, es sind also in Wirklichkeit die beiderseitigen unendlichen Verlängerungen des Durchmessers Cℭ, welche in der Hyperbelfläche liegen, der entsprechenden Sehne C′ℭ′ des Leitkreises homolog. Wie es nun für einen äusseren Aehnlichkeitspunkt O′ dreierlei Aehnlichkeitsstrahlen gibt, nämlich solche, welche wie O′γ den Leitkreis in zwei reellen Punkten durchschneiden, solche wie OΠ und O′Π', welche ihn in einem reellen Punkt berühren, und endlich solche, wie Oδ, welche gar keinen reellen Punkt mit dem Kreise gemein haben, so muss es auch dreierlei Hyperbeldurchmesser geben, weil die Durchmesser der

Hyperbel diesen Aehnlichkeitsstrahlen homolog sind (§. 89, d). Ein Durchmesser wie C𝔈, der die Hyperbel in zwei Punkten schneidet, heisst reell, ein solcher wie Oδ, welcher keinen Punkt mit der Hyperbel gemein hat, heisst imaginär, *) und zwei Durchmesser OΠ und OΠ', welche den berührenden Aehnlichkeitsstrahlen O'Π und O'Π' des Kreises homolog sind, und die Hyperbel in den unendlich entfernten Punkten berühren, die den Punkten P' und 𝔓' der Gegenaxe homolog sind, heissen Asymptoten. Es ist jedoch bei der Anschauung, welche durch die Collineation geboten ist, zu bemerken, dass die zwei Punkte des unendlichen Raumes, nach welchen eine unbegrenzte Gerade verläuft, nur als ein einziger betrachtet werden; die zwei Hyperbeläste AC und 𝔄𝔈 verlaufen also so gegen den unendlichen Raum, dass der eine diesseits und der andere jenseits mit der unendlichen Verlängerung der Richtung P𝔓 der Asymptote zu convergiren scheint. Es wird übrigens dieser in der unmittelbaren Anschauung doppelte Punkt des unendlichen Raumes nur als ein einziger Punkt betrachtet, so dass, obgleich jeder Hyperbelast nach zwei Seiten hin in den unendlichen Raum verläuft, die Hyperbel doch als eine Curve betrachtet werden muss, die nur mit zwei Punkten im unendlichen Raume liegt.

Die Lage des Hyperbelmittelpunktes ausserhalb der Hyperbelfläche gestattet noch folgende weitere Folgerungen. Die paarweise conjugirten Hyperbeldurchmesser bilden einen involutorischen Vielstrahl entgegengesetzter Aufeinanderfolge (§. 107, a), welcher zwei Normalstrahlen hat, die mit den zwei Axen zusammen fallen, und welcher auch zwei Hauptstrahlen hat, die die Hyperbel berühren, und also mit den Asymptoten zusammen fallen. Im Uebrigen werden jede zwei conjugirten Durchmesser durch die zwei Asymptoten harmonisch getrennt (§. 72, c).

---

*) Ein solcher Durchmesser ist reell, aber die Punkte, in welchen er die Hyperbel schneidet, sind imaginär, der Durchmesser ist also eine uneigentliche Sekante.

Hieraus folgt aber noch weiter, dass, wenn der eine Durchmesser im Feld POp' liegt und reell ist, der conjugirte Durchmesser in dem Feld POp liegen und imaginär sein muss, und dass also die Asymptoten die zwei Felder der reellen und imaginären Durchmesser gegen einander abgrenzen. Diese Eigenthümlichkeit erstreckt sich auch in gewissem Sinne auf die Sehnen, welche den Durchmessern conjugirt sind. Weil nämlich alle Sehnen, welche einem Durchmesser conjugirt sind, auch mit den Endtangenten desselben parallel laufen, so wird man schliessen, dass die Sehnen,*) welche einem reellen Durchmesser conjugirt sind, nur in der Hyperbelfläche liegen können, und also innere Sehnen sind, und dass dagegen diejenigen Sehnen, welche einem imaginären Durchmesser conjugirt sind, wie der conjugirte Durchmesser, dem sie parallel gehen, nur äussere Sehnen sein können.

Von den zwei Axen ist die Hauptaxe A𝔄, welche in dem Feld POp' des Asymptotenwinkels, liegt, reell; die andere, zweite Axe, welche im Feld POp liegt, ist imaginär. Weil nun aber die zwei Axen senkrecht auf einander stehen (§. 112, d), und zugleich als conjugirte Durchmesser durch die Asymptoten harmonisch getrennt werden (§. 143, b), so werden sie die Winkel POp' und POp, welche durch die Asymptoten gebildet werden, halbiren (§. 72, d).

Die Collineation der Hyperbel mit ihrem Leitkreis gibt auch einen Aufschluss über die Lage der Tangenten im Verhältniss zum Mittelpunkt der Hyperbel. Die Tangenten des Leitkreises berühren entweder wie ℭ'𝔗' den äusseren Bogen P'𝔄𝔓' (Fig. 86), und dann schneiden sie die Centrale in irgend einem Punkt 𝔗' zwischen 𝔄' und O'. Die homologen Tangenten der Hyperbel, welche den entsprechenden Ast 𝔄ℭ berühren, müssen also die Axe A𝔄 auch in einem Punkt 𝔗 schneiden, der zwischen den homologen Punkten O und 𝔄 liegt. Die

---

*) Unter Sehne wird die endliche Strecke verstanden, die zwischen den Punkten liegt, in welchen eine eigentliche Sekante von ihrer Curve geschnitten wird.

Tangenten des Leitkreises, welche den innern Bogen P'A'𝔓' berühren, begegnen dem Durchmesser A'𝔄' in einem Punkte T', welcher auf der Verlängerung der Strecke O'A' liegt; es müssen also auch die Tangenten, welche den homologen Ast AC berühren, die Axe der Hyperbel in einem Punkte T schneiden, der zwischen den Punkten O und A liegt. Die Tangente, welche einen Hyperbelast berührt, schneidet also immer denjenigen Theil der Axe, welcher zwischen dem Scheitel dieses Astes und dem Mittelpunkt der Hyperbel liegt.

D. Asymptoten der Hyperbel.

§. 144. Die Lage der Asymptoten einer Hyperbel ist durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Die zwei Asymptoten einer Hyperbel sind denjenigen Halbmessern eines ihrer Leitkreise parallel, welche nach den Berührungspunkten ihrer gemeinschaftlichen Tangenten gezogen werden.

b) Wenn man über dem Stück der reellen Axe, welches zwischen dem Mittelpunkt der Hyperbel und dem Aehnlichkeitspunkt des Leitkreises liegt, als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so gehen die Asymptoten durch diejenigen zwei Punkte des Umfanges dieses Kreises, welche durch die berührenden Aehnlichkeitsstrahlen bezeichnet werden.

c) Wenn die Collineationsaxe zwischen den Leitkreisen und der Hyperbel gezeichnet ist, so bezeichnen auf ihr die gemeinschaftlichen Tangenten der Leitkreise ebenfalls die Punkte, durch welche die Asymptoten gehen; auch werden diese Punkte auf der Collineationsaxe durch den Kreis bestimmt, welchen man über dem Stücke der Axe beschreibt, das zwischen dem Mittelpunkt der Hyperbel und dem Aehnlichkeitspunkt der Leitkreise liegt.

d) Die Asymptoten gehen durch die zwei Punkte, in welchen sich zwei Kreise schneiden, von welchen der eine über der reellen Axe der Hyperbel und der andere über der halben Entfernung der Brennpunkte beschrieben wird.

e) Die Asymptoten gehen durch die zwei Punkte der Direktrize einer Hyperbel, in welcher sie von einer über der reellen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreislinie geschnitten wird.

§. 145. Als Hauptstrahlen des involutorischen Vielstrahls der conjugirten Durchmesser und als Tangenten, welche die Hyperbel in

Punkten des unendlichen Raumes berühren, kommen den Asymptoten folgende Eigenschaften zu:

a) Die zwischen den Asymptoten liegende Strecke einer jeden Tangente wird durch ihren Berührungspunkt halbirt.

b) Auf jeder Sekante der Hyperbel sind die zwei Abschnitte einander gleich, welche zwischen der Curve und ihren Asymptoten liegen.

c) In jeder Hyperbel ist die Fläche des Dreiecks, welche von einer Tangente und den zwei Asymptoten begrenzt wird, eine constante Grösse, und also der Fläche desjenigen Dreiecks gleich, welches von den Asymptoten und der Scheiteltangente gebildet wird.

d) Alle Parallelogramme, welche von den zwei Asymptoten gebildet werden, und deren viertes Eck auf dem Umfang der Hyperbel liegt, sind einander gleich, und halb so gross als das Produkt aus der halben reellen Axe in die halbe Scheiteltangente.

e) Die Asymptoten werden von jeden zwei Tangenten in solchen Punkten geschnitten, deren Verbindungslinien einander parallel sind.

Zur Bestimmung der Lage der Asymptoten bedarf es zweier Punkte auf jeder derselben. Da nun die Asymptoten Durchmesser sind, so ist einer dieser Punkte durch den Mittelpunkt O der Hyperbel gegeben, und man hat nur noch einen zweiten Punkt auf derselben aufzusuchen. Der Punkt P des unendlichen Raumes, in welchem die Asymptote die Hyperbel berührt, ist dem Punkt P′ des Leitkreises homolog (Fig. 89), welcher durch den berührenden Aehnlichkeitsstrahl O′Π bestimmt wird. Es liegt also jener Berührungspunkt der Asymptote auf dem Collineationsstrahl F′P′, und wenn man OP ∥ F′P′ zieht, so geht auch der Durchmesser OP durch jenen Berührungspunkt oder OP ist eine Asymptote der Hyperbel. Weil nun F′P′ ⊥ O′P′, so ist also auch OΠ ⊥ O′Π. Der Punkt Π, in welchem die Asymptote den Aehnlichkeitsstrahl durchschneidet, wird also durch einen Kreis bestimmt, der über OO′ als Durchmesser construirt wird.

Es sind aber die Asymptoten OΠ und OΠ' den Aehnlichkeitsstrahlen O′Π und O′Π' in dem System des Leitkreises homolog (§. 89, d), folglich ist die Verbindungslinie $\Pi\Pi'$ ihrer Schnittpunkte die Collineationsaxe dieser Curven (§. 46, d).

Es convergiren also die Asymptoten mit den Aehnlichkeitsstrahlen der Leitkreise, mit der Collineationsaxe zwischen den Leitkreisen und der Hyperbel, und mit dem über OO' beschriebenen Kreis in einem Punkt, und jedes Paar der drei letzteren Stücke reicht hin, um die Punkte Π und Π' der Asymptoten zu bestimmen. Man bedarf selbst nicht einmal den Mittelpunkt der Hyperbel, wenn die Aehnlichkeitsstrahlen der Leitkreise gegeben sind, denn die Collineationsaxe $\Pi\Pi'$ ist die Potenzlinie zwischen den Leitkreisen und liegt als solche in der Mitte zwischen $P'\mathfrak{P}'$ und $P''\mathfrak{P}''$, und halbirt die Strecken $P'P''$ und $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ (§. 81, b). Die senkrechten Halbirungslinien dieser Strecken fallen also mit den Asymptoten der Hyperbel zusammen und bestimmen zugleich auch den Mittelpunkt O.

Alle diese Verhältnisse nehmen noch eine einfachere Gestalt an, wenn einer der Leitkreise auf einen Punkt reduzirt ist. In diesem Fall fällt der Aehnlichkeitspunkt O' mit dem Brennpunkt F' zusammen (§. 78, c), und die Collineationsaxe verwandelt sich in eine Direktrize (§. 97). Weil ferner $OF'=OF''$ (Fig. 90), und $O\Pi \parallel F''P''$, so ist auch $O\Pi = \frac{1}{2}\, F''P'' = \frac{1}{2}\, A\mathfrak{A} = OA$ (§. 97). Ein zweiter über $A\mathfrak{A}$ als Durchmesser construirter Kreis wird also ebenfalls durch die Punkte Π und Π' gehen, in welchen die Asymptoten mit den Aehnlichkeitsstrahlen der Direktrize in dem über OO' construirten Kreis convergiren. Es wird also in diesem Fall jedes Paar der vier letzteren Stücke zur Bestimmung der Punkte Π und Π', und also auch zur Construction der Asymptoten ausreichen, so dass man auf sechs verschiedenen Wegen zu den Asymptoten gelangen kann.

Die Eigenschaft der Asymptoten, durch jedes Paar conjugirter Durchmesser harmonisch getrennt zu werden (§. 143, b), verleiht ihnen eine besondere Eigenschaft, die sie in ihrem Verhältniss zu den Sekanten und Tangenten zeigen. Zieht man nämlich durch den Scheitel C eines reellen Durchmessers (Fig. 92) eine Tangente, so ist sie ihrem Durchmesser $C\mathfrak{C}$ conjugirt und dem conjugirten Durchmesser $D\mathfrak{D}$ parallel. Weil sie aber durch den harmonischen Vierstrahl, der durch die

zwei conjugirten Durchmesser und die Asymptoten gebildet wird, harmonisch getheilt wird, so folgt, dass das Stück $R\mathfrak{R}$ einer solchen Tangente in ihrem Berührungspunkt C halbirt werden muss (§. 31). Derselbe Schluss ist aber auch auf jede Sekante $N\mathfrak{N}$ anwendbar, welche einem dieser Durchmesser zugeordnet ist, sie wird von dem conjugirten Durchmesser in E halbirt, so dass $EN = E\mathfrak{N}$. Es wird aber auch die Sehne $M\mathfrak{M}$, welche die Sekante in der Hyperbel bildet, von eben diesem Durchmesser halbirt, so dass auch $EM = E\mathfrak{M}$ (§. 112, a). Mithin ist auch $EN - EM = E\mathfrak{N} - E\mathfrak{M}$, d. i. $MN = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Dasselbe gilt auch von einer Sekante $m\mathfrak{m}$, welche einem imaginären Durchmesser conjugirt ist; auch hier wird man finden, dass $mn = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

Nicht weniger bedeutend sind die Eigenschaften, welche den Asymptoten insofern zukommen, als sie Tangenten sind, deren Berührungspunkte im unendlichen Raum liegen. Als Tangenten der Hyperbel werden sie von allen übrigen Tangenten der Hyperbel in conformen Punktreihen getheilt, und zwar sind die Berührungspunkte der Asymptoten mit ihrem Convergenzpunkt homolog (§. 103, c). Weil aber ihre Berührungspunkte im unendlichen Raum sind, so ist ihr Convergenzpunkt der Gegenpunkt der conformen Punktreihen (§. 19). Daraus folgt aber, dass das Produkt, welches zwischen dem Convergenzpunkt und den Schnittpunkten einer Tangente liegt, eine constante Grösse hat (§. 19). Sind also $R\mathfrak{R}$, $T\mathfrak{T}$ (Fig. 93) zwei Tangenten zwischen den Asymptoten, so ist $OR \cdot O\mathfrak{R} = OT \cdot O\mathfrak{T}$. Die Dreiecke $OR\mathfrak{R}$ und $OT\mathfrak{T}$, welche hiernach einen Winkel gemeinschaftlich haben, und in welchen die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten einander gleich sind, haben also auch gleiche Oberflächen. Zieht man von dem Berührungspunkt t einer Tangente die Geraden $tQ \parallel O\mathfrak{R}$, $t\mathfrak{Q} \parallel OR$, so entsteht ein Parallelogramm $OQt\mathfrak{Q}$, welches mit dem Eck t in der Mitte von $T\mathfrak{T}$ liegt und halb so gross ist als das Dreieck $OT\mathfrak{T}$. Es werden also auch die auf diese Weise construirten Parallelogramme wie die Dreiecke, deren Hälfte sie sind, eine constante Grösse haben. Das

Dreieck, welches die Scheiteltangente b𝔟 (Fig. 98) bildet, hat den Flächeninhalt OA . A𝔟, das Parallelogramm OBA𝔅, welches zum Scheitelpunkt A gehört, ist also = ½ OA . A𝔟. Diese Grössen sind am geeignetsten zum Anhaltspunkt für die Grösse obiger Dreiecke und Parallelogramme.

Aus der Gleichung OR . O𝔑 = OT . O𝔗, folgt auch die Proportion OR : OT = O𝔗 : O𝔑, und diese Proportion zeigt ihrerseits, dass die Verbindungslinie R𝔗 || 𝔑T (§. 26).

E. Substitute der Hyperbel.

§. 146. Das Stück der Scheiteltangente, welches zwischen den Asymptoten liegt, heisst Substitute, weil es hinsichtlich seiner Grösse eine ähnliche Bedeutung für die Hyperbel hat, wie die kleine Axe für die Ellipse, wie diess aus folgenden Sätzen erhellt.

a) Die reelle Axe der Hyperbel, die Entfernung ihrer Brennpunkte und die Substitute haben die Eigenschaft, die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden zu können.

b) Die Substitute ist das geometrische Mittel zwischen den zwei Abschnitten, welche ein Brennpunkt auf der reellen Axe bildet.

c) Die Substitute ist das geometrische Mittel zwischen den zwei Senkrechten, die von den Brennpunkten aus auf irgend eine Tangente der Hyperbel gezogen werden.

(Das Verhältniss der Substitute zum Hauptparameter ist im folgenden Abschnitt angegeben.)

Die Tangente b𝔟 (Fig. 90), welche man durch den Scheitel A der reellen Axe zieht, vertritt hinsichtlich ihrer Grösseverhältnisse die Stelle einer zweiten Axe, von deren Grösse, weil sie imaginär ist, nicht die Rede sein kann. Nach §. 144, d geht die Asymptote OP durch den Punkt Π, in welchem sich die zwei Halbkreise schneiden, von denen der eine über der reellen Axe A𝔄 und der andere über der Entfernung OF′ beschrieben wird. Zieht man also die Geraden OΠ und O′Π, so bilden sie ein bei Π rechtwinkliges Dreieck OΠO′, in welchem die Seite OΠ die Richtung der Asymptote angibt. Die Scheiteltangente b𝔟 ist aber auf der Axe A𝔄 senkrecht (§. 112 a und d), und bildet das rechtwinklige Dreieck OA𝔟. Diese

zwei rechtwinkligen Dreiecke $O\Pi O'$ und $OA\mathfrak{b}$ haben den spitzen Winkel bei O gemeinschaftlich, es ist als Halbmesser eines Kreises die Seite $OA = O\Pi$, folglich sind sie congruent, und es ist auch $O\mathfrak{b} = OO'$. Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks $OA\Pi$ sind also beziehungsweise der halben reellen Axe (OA), der halben Substitute ($A\mathfrak{b}$) und der halben Entfernung der Brennpunkte ($O\mathfrak{b} = OF'$) gleich, es wird also auch dasjenige Dreieck rechtwinklig sein, welches aus der ganzen Axe, der ganzen Substitute und der ganzen Entfernung der Brennpunkte construirt wird.

Weil der Winkel $O\Pi F'$ als Winkel im Halbkreis ein rechter ist, so berührt die Gerade $F'\Pi$ den Kreis über $A\mathfrak{A}$, und ist daher eine Tangente desselben; daraus folgt, dass $F'\Pi$ und folglich auch die gleichgrosse halbe Substitute $A\mathfrak{b}$ das geometrische Mittel ist zwischen den Abschnitten $F'A$ und $F'\mathfrak{A}$.

Aber auch wenn man in einem beliebigen Punkt C eine Tangente an die Hyperbel zieht (Fig. 91), welche den über der reellen Axe construirten Kreis $A\mathfrak{A}$ in zwei Punkten D und E durchschneidet, so weiss man, dass die in D und E auf der Tangente errichteten Senkrechten durch die Brennpunkte F' und F'' gehen (§. 131). Man sieht leicht, dass $F''E = F'G$, also auch $F''E \cdot F'D = F'G \cdot F'D = F'\Pi^2$. Da nun $F'\Pi$ nach dem Vorausgehenden der Substitute gleich ist, so sieht man, dass sie überhaupt das geometrische Mittel ist zwischen den zwei Senkrechten, welche man von den Brennpunkten aus auf eine beliebige Tangente fällt.

F. Hyperbelarten.

§. 147. Hyperbeln sind ähnlich, wenn ihre Asymptoten gleiche Winkel mit einander machen. Ihre Gestalt kann daher nach diesen Winkeln beurtheilt werden, wobei immer diejenigen Winkel verstanden sind, deren Feld die reellen Durchmesser einschliesst.

a) Ist der Asymptotenwinkel zweien Rechten gleich, so hat man den extremen Fall, in welchem die Hyperbel in zwei Gerade übergeht, welche auf der Axe senkrecht stehen.

b) Ist der Asymptotenwinkel einem Rechten gleich, so wird auch

die Substitute der reellen Axe gleich, und die Hyperbel heisst gleichseitig. Es haben also andererseits auch alle gleichseitigen Hyperbeln einen rechten Asymptotenwinkel und sind ähnliche Curven.

c) Ist der Asymptotenwinkel gleich Null, so geht die Hyperbel in eine gerade Richtung über, welche mit der reellen Axe zusammenfällt.

d) Zwischen diesen Grenzen liegen die übrigen Hyperbelgestalten, welche ungleichseitig genannt werden, und entweder einen stumpfen oder spitzen Asymptotenwinkel haben.

e) Aehnliche Hyperbeln, d. h. Hyperbeln, deren Asymptotenwinkel gleich sind, unterscheiden sich nur durch die Grösse ihrer Axe. Die Asymptoten selbst bilden die Grenzgestalt für solche ähnliche Hyperbeln, indem sie die extreme Gestalt derselben darstellen, welche sich für den Fall ergibt, wo die Axe den Werth O erreicht hat. Jedes Paar im endlichen Raum convergirender Geraden stellt daher diesen extremen Fall der Hyperbelgestalt dar.

§. 148. Die gleichseitige Hyperbel ist hinsichtlich ihres Durchmessers noch durch folgende Winkelverhältnisse ausgezeichnet:

a) Die Winkel zweier conjugirter Durchmesser werden durch die Asymptoten halbirt.

b) Die Winkel, welche zwei beliebige Durchmesser mit einander machen, sind denjenigen Winkeln gleich, welche ihre conjugirten Durchmesser mit einander machen.

c) Wenn man durch die Endpunkte eines Durchmessers Tangenten und ausserdem noch die zwei Sehnen nach einem beliebigen Punkt des Hyperbelumfanges zieht, so ist der Winkel, welchen an dem einen Endpunkt die innere Sehne mit der Tangente macht, so gross als der Winkel, welchen am andern Endpunkt die äussere Sehne mit dem Durchmesser macht.

d) Wenn man über einem beliebigen Durchmesser ein Dreieck beschreibt, dessen Spitze irgendwo auf der Hyperbelcurve liegt, so ist die Differenz der Winkel an der Grundlinie dieses Dreiecks eine constante Grösse, welche immer dem Winkel gleich kommt, unter welchem dem Durchmesser seine Sehnen conjugirt sind.

e) Ueberhaupt ist die gleichseitige Hyperbel diejenige Curve, welche aus zwei gleichen, aber entgegengesetzt liegenden Vielstrahlen durch die Convergenzpunkte der homologen Strahlen erzeugt wird, und zwar figurirt die Scheitellinie als Durchmesser und die Strahlen

welche der Scheitellinie homolog sind, als Endtangenten dieses Durchmessers.

§. 149. In Betreff der der Axe der Hyperbel conjugirten Sehnen ist zu erwähnen:

a) In der gleichseitigen Hyperbel ist die halbe Sehne, welche der Axe conjugirt ist, das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten der Axe, welche sie bildet.

b) Der Parameter der gleichseitigen Hyperbel ist der Substitute gleich.

c) Der Parameter der ungleichseitigen Hyperbel ist die dritte Proportionale zur reellen Axe und Substitute.

Weil die reelle Axe (a), die Substitute (b) und die Entfernung der Brennpunkte (f) ein rechtwinkliges Dreieck zusammensetzen, und weil in einem solchen Dreieck die Winkel durch das Verhältniss zweier Seiten bestimmt sind, so werden auch durch die Excentricität f : a die Winkel dieses Dreiecks, und folglich auch der Asymptotenwinkel, welcher dem doppelten spitzen Winkel zwischen f und a gleich ist, bestimmt. Man schliesst hieraus, dass ähnliche Hyperbeln, d. h. Hyperbeln mit gleicher Excentricität, auch gleiche Asymptotenwinkel haben, und umgekehrt: dass Hyperbeln mit gleichen Asymptotenwinkeln einander ähnlich sind (§. 135). Ist der Asymptotenwinkel ein rechter, so ist der Winkel zwischen a und b ein halber rechter, und das Dreieck OAb ist rechtwinklig gleichschenkelig (Fig. 95), folglich $OA = Ab$, also auch $a = b$. Eine solche Hyperbel heisst gleichseitig und nimmt unter den Hyperbeln eine ganz ähnliche Stellung ein, wie der Kreis unter den Ellipsen. Diess zeigt sich namentlich, wenn man die Winkelverhältnisse der gleichseitigen Hyperbel näher untersucht.

Die allgemeine Eigenschaft, dass jedes Paar conjugirter Durchmesser C𝔆 und D𝔇 (Fig. 94) von den Asymptoten P𝔓 und p𝔭 harmonisch getrennt werden, nimmt bei der gleichseitigen Hyperbel, in welcher die Asymptoten senkrecht auf einander stehen, die besondere Form an, dass die Winkel, welche die conjugirten Durchmesser mit einander machen, durch die Asymptoten halbirt werden (§. 72, d). Demnach ist $\angle POC =$

$< POD$. Ebenso wenn auch $M\mathfrak{M}$ und $N\mathfrak{N}$ zwei conjugirte Durchmesser sind, so ist auch $< POM = < PO\mathfrak{N}$. Subtrahirt man diese zwei Gleichungen von einander, so findet man $< COM = < DO\mathfrak{N}$, d. h. der Winkel, den zwei Durchmesser mit einander machen, ist dem Winkel ihrer conjugirten Durchmesser gleich. Zieht man durch M zwei Linien, von welchen die eine MT dem Durchmesser $M\mathfrak{M}$ und die andere MS dem Durchmesser $C\mathfrak{C}$ conjugirt ist, so wird die erstere, MT, die Hyperbel berühren, und mit dem Durchmesser $N\mathfrak{N}$ parallel sein; die andere MS wird in dem Punkt K von dem Durchmesser $C\mathfrak{C}$ halbirt werden und dem Durchmesser $D\mathfrak{D}$ parallel sein (§. 112, a). Daraus folgt, dass auch $< TMS = < DO\mathfrak{N} = < MOC$. Zieht man nun noch $\mathfrak{M}S$, so ist $\mathfrak{M}S \parallel OK$, weil der Punkt K die Sehne MS und O den Durchmesser $M\mathfrak{M}$ hälftet. Es ist also auch $< M\mathfrak{M}S = < MOC$. Aus diesen Winkelgleichungen folgt, dass auch $< TMS = < M\mathfrak{M}S$. Wenn man also von den Endpunkten M und $\mathfrak{M}$ eines Durchmessers nach einem beliebigen Punkt S des Hyperbelumfanges zwei Sehnen, und ausserdem in M noch eine Tangente zieht, so ist der Winkel, den die Tangente MT und die innere Sehne MS mit einander machen, dem Winkel gleich, welchen die andere äussere Sehne $\mathfrak{M}S$ mit dem Durchmesser $M\mathfrak{M}$ bildet. Diese Eigenschaft kann noch auf eine andere Form gebracht werden, wenn man die Winkel bei M und $\mathfrak{M}$ von einander subtrahirt, denn man erhält $< SM\mathfrak{M} - S\mathfrak{M}M = < SM\mathfrak{M} - SMT = TM\mathfrak{M}$, d. h. wenn man über einem Durchmesser $M\mathfrak{M}$ als Grundlinie ein Dreieck beschreibt, dessen Spitze S auf dem Hyperbelumfang liegt, so ist die Differenz der Winkel an der Grundlinie eine constante Grösse. Diese constante Grösse ist nämlich der Winkel $TM\mathfrak{M}$, unter welchem dem Durchmesser $M\mathfrak{M}$ alle seine Linien conjugirt sind. Hätte man den Punkt S auf der andern Seite des Durchmessers genommen, so hätte sich nichts geändert, und die Differenz der Winkel hätte zum Nebenwinkel des Winkels $TM\mathfrak{M}$ geführt.

Diese Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel kann noch

auf eine dritte interessante Form gebracht werden: denn zieht man noch nach anderen Punkten des Hyperbelumfanges, z.B. nach dem Punkt R solche Sehnen, so entsteht am Punkt M ein Vielstrahl M, TSR, welcher dem entsprechenden Vielstrahl 𝔐, MSR gleich ist, und gegen ihn in entgegengesetzter Aufeinanderfolge der homologen Strahlen projektivisch liegt. Die gleichseitige Hyperbelcurve wird also durch die Convergenzpunkte der homologen Strahlen zweier solchen Vielstrahlen erzeugt. Darin stimmt sie ganz mit dem Kreis überein (§. 66) und unterscheidet sich von demselben nur dadurch, dass die gleichen projektivischen Vielstrahlen eine entgegengesetzte Lage haben, während dieselben im Kreise sich in einstimmiger Lage befinden.

Für die Endpunkte A und 𝔄 (Fig. 95) der reellen Axe ist die Scheitellinie A𝔄 der gleichen Vielstrahlen mit dem homologen Strahl Ab, welcher die Hyperbel im Scheitel berührt, senkrecht. Zieht man daher nach einem beliebigen Punkt M die homologen Strahlen AM und 𝔄M, und von M aus die Sehne MN senkrecht zur Axe, so dass sie in P von der Axe halbirt wird, so ist $\angle M\mathfrak{A}A = \angle MAb$,
und weil MN und Ab, als zur Axe senkrecht, einander parallel sind $\angle MAb = \angle AMP$,
folglich auch $\angle M\mathfrak{A}A = \angle AMP$. Es sind also die ohnehin rechtwinkligen Dreiecke 𝔄PM und APM ähnlich, folglich

$$\mathfrak{A}P : MP = MP : AP.$$

Es ist also auch in der gleichseitigen Hyperbel, wie im Kreise die halbe Sehne, welche der Axe zugeordnet ist, das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten der Axe. Geht diese Sehne durch den Brennpunkt der gleichseitigen Hyperbel, so ist sie der Hauptparameter. Und weil auch der Brennpunkt solche Abschnitte auf der Axe bildet, zu welcher die Substitute das geometrische Mittel ist, so folgt, dass der Parameter der gleichseitigen Hyperbel der Substitute gleich ist.

Auch in der ungleichseitigen Hyperbel existirt für den Parameter ein sehr einfacher Ausdruck. Um denselben aufzufinden, beschreibe man über der reellen Axe A𝔄 (Fig. 96) der ungleich-

seitigen Hyperbel MA𝔐 noch eine gleichseitige Hyperbel M'A𝔐',
so sind die zwei Hyperbeln affin (§. 134, c), und die Asymptoten Ob und Ob' sind homologe Linien dieser affinen Systeme. Construirt man also die gemeinschaftliche Scheiteltangente, welche die ungleichseitige Hyperbel in dem Punkte b und die gleichseitige in dem Punkte b' schneidet, und errichtet im Brennpunkt F' der ungleichseitigen Hyperbel eine Senkrechte, welche die ungleichseitige Hyperbel in dem Punkte N und die gleichseitige in dem Punkte N' schneidet, so folgt aus den Gesetzen der Affinität (§. 134, c), dass

$$F'N : F'N' = Ab : Ab' \ (1).$$

Weil aber F' der Brennpunkt der ungleichseitigen Hyperbel ist, so folgt aus (§. 146, b), dass

$$Ab^2 = F'A \ . \ F'\mathfrak{A} \ (2),$$

und weil F'N' die der Axe conjugirte halbe Sehne der gleichseitigen Hyperbel ist, so folgt aus §. 149, a

$$F'N'^2 = F'A \ . \ F'\mathfrak{A} \ (3),$$

aus den Gleichungen 2 und 3 folgt, dass $Ab = F'N'$, und aus §. 149, b, dass $Ab' = OA$, und wenn man diese Werthe in (1) substituirt, so erhält man

$$F'N : Ab = Ab : AO.$$

Es ist also der halbe Parameter der ungleichseitigen Hyperbel die dritte geometrische Proportionale zur halben reellen Axe und zur halben Substitute.

Zwölftes Buch.

Die Parabel.

A. Gestalt der Parabel im Allgemeinen.

§. 150. Die Parabel ist eine Curve, welche im endlichen Raum als nicht geschlossen erscheint, sondern nach zwei Seiten hin in den unendlichen Raum verläuft. Sie theilt die Ebene, in der sie liegt, in zwei Felder ab, von welchen dasjenige, welches eine convexe Gestalt hat, die eigentliche Oberfläche der Parabel ist.

Alle Sehnen liegen in der Parabelfläche.

Die Parabel geht aus einer solchen Collineation mit dem Kreise hervor, bei welcher die Gegenaxe in dem System dieses Kreises eben diesen Kreis in einem Punkte berührt. Sie hat daher die Gestalt einer nicht geschlossenen Curve, welche nach zwei Seiten hin in dem unendlichen Raume verläuft (§. 102). Ihre Gestalt kann namentlich aus der perspektivischen Collineation, in welcher sie zu ihrem Leitkreise steht, deutlich erkannt werden. Die Parabel entwickelt sich übrigens aus zwei Leitkreisen, von welchen einer unendlich gross ist, und im endlichen Raum in Form einer Geraden $A''C''$ erscheint (§. 102). Diese Collineation ist für den äusseren Aehnlichkeitspunkt von einstimmiger Aufeinanderfolge der homologen Elemente, und zudem noch durch folgende Merkmale ausgezeichnet:

a) Der Aehnlichkeitspunkt O' (Fig. 59, c) liegt auf der Peripherie des endlichen Leitkreises in demjenigen Punkt, wel-

cher durch den Durchmesser bestimmt wird, der zur Geraden A''C'' senkrecht steht, die den andern Leitkreis ersetzt.

b) Die Polare O'c' dieses Punktes O', welche den endlichen Leitkreis in O' berührt, ist die Gegenaxe im System dieses Kreises und entspricht derjenigen Tangente der Parabel, welche sie in einem Punkt des unendlichen Raumes berührt.

c) Die Collineationsaxe, welche mit der Potenzlinie der zwei Leitkreise zusammen fällt, fällt zugleich auch mit der Geraden A''C'', welche den unendlich grossen Leitkreis ersetzt, zusammen (§. 83, d).

Weil der Mittelpunkt F' des endlichen Leitkreises zugleich das Centrum der Collineation ist, so bestimmt jede Richtung eines Halbmessers dieses Kreises zwei homologe Punkte C und C' der zwei Curven, und weil die Gegenaxe keinen der Halbmesser des endlichen Leitkreises schneidet, so entsprechen sich die endlichen Strecken F'C und F'C' unmittelbar. Und wie jede Sehne C'𝔊' (Fig. 61, c) des Leitkreises, welche nicht durch O' geht, die Gegenaxe erst bei ihrer Verlängerung in einem Punkte c' trifft, so entspricht ihr auch in der Parabel nur wieder eine endliche Sehne C𝔊, welche in der Parabelfläche liegt. Wenn man also zwei Punkte des Parabelumfanges verbindet, so fällt die endliche Verbindungslinie derselben ganz in die Parabelfläche, und ist eine innere Sehne. Daraus folgt aber, dass die Parabelfläche derjenige Theil der Ebene ist, welcher eine convexe Gestalt hat und den Mittelpunkt F' des Leitkreises, d. i. den Brennpunkt, einschliesst.

B. Brennpunkt der Parabel.

§. 151. Nur ein Brennpunkt der Parabel liegt im unendlichen Raum in der Fläche der Parabel, die Entfernung der zwei Brennpunkte und die Axe der Parabel sind unendlich gross. Hiermit hängen noch folgende Eigenthümlichkeiten der Parabel zusammen:

a) Die Excentricität der Parabel ist gleich Eins. Alle Parabeln sind also ähnliche Curven.

b) Die Direktrize liegt ausserhalb der Parabel, und jeder Punkt

auf dem Umfang der letztern steht ebenso weit vom Brennpunkt als von der Direktrize ab.

c) Die Endtangenten jedes Parameters stehen senkrecht aufeinander und convergiren in einem Punkte der Direktrize, und zwar in demjenigen, der senkrecht über dem Brennpunkte des Parameters liegt.

Umgekehrt: wenn die Schenkel eines rechten Winkels eine Parabel berühren, so liegt dessen Scheitel auf der Direktrize und dessen Berührungssehne geht durch den Brennpunkt.

Im vorigen Abschnitt hat sich gezeigt, dass der Mittelpunkt des endlichen Leitkreises, oder ein Brennpunkt der Parabel im endlichen Raum der Parabelfläche liegt. Der andere Brennpunkt F″, der durch den Mittelpunkt des unendlich grossen Leitkreises bestimmt wird, liegt im unendlichen Raum. Ebenso liegt aber auch derjenige Scheitel der Parabel, welcher dem Endpunkt 𝔄′ (Fig. 59, c) des Durchmessers des Leitkreises entspricht, der mit dem Aehnlichkeitspunkt O′ zusammenfällt, in dem unendlichen Raum, es ist also die Entfernung der Brennpunkte sowie die Axe der Parabel unendlich gross. Die Excentricität der Parabel ist also gleich Eins, und alle Parabeln sind als Curven mit gleicher Excentricität einander ähnlich (§. 135).

Die Direktrize C′𝔖′ der Parabel (Fig. 60, c) liegt als die Polare des Brennpunkts ausserhalb der Parabel; und wenn CC′ den Abstand eines Punktes des Umfanges vorstellt, so folgt aus dem Vorausgehenden, dass CF′ : CC′ = 1, oder CF′ = CC′. Ist C𝔖 irgend ein Parameter der Parabel, so convergiren die zwei Endtangenten dieser Sehne in einem Punkt γ der Direktrize C′𝔖′ (§. 113, b) und bilden mit der Geraden γF′, welche nach dem zugehörigen Brennpunkt gezogen wird, und mit der Direktrize C′𝔖′ selbst einen harmonischen Vierstrahl γ (§. 113, c). Weil nun aber die Direktrize C′𝔖′ zugleich mit der Kreislinie des unendlich grossen Leitkreises zusammen fällt und die Tangente des Punktes γ in diesem Fall ebenfalls diese Richtung hat, so ist F′γC′C ein Dalloid, und Cγ halbirt den Winkel F′γC′ desselben, und ebenso halbirt γ𝔖 den Winkel F′γ𝔖′ (§. 89, a). Es folgt hieraus, dass die Strahlen Cγ und

𝔖γ des harmonischen Vierstrahls γ senkrecht auf einander stehen (§. 72, d).

C. Mittelpunkt der Parabel.

§. 152. Der Mittelpunkt der Parabel liegt im unendlichen Raum. Diese Eigenschaft verleiht der Parabel noch folgende Eigenthümlichkeiten:

a) Alle Durchmesser der Parabel sind einander parallel und stehen auf der Direktrize senkrecht.

b) Keinem Durchmesser der Parabel ist ein Durchmesser des endlichen Raumes zugeordnet.

c) Dasjenige Stück eines Parabeldurchmessers, welches von einer conjugirten Sehne und ihrem Pol begrenzt ist, wird durch die Parabelcurve halbirt.

d) Der einem Durchmesser conjugirte Parameter ist viermal so gross als der Abschnitt des Durchmessers, den er begrenzt.

Der Aehnlichkeitspunkt O′ (Fig. 59, c) des Leitkreises und der Geraden A″C″, welche den zweiten unendlich grossen Leitkreis ersetzt, liegt auf der Gegenaxe O′𝔠′; der Mittelpunkt der Parabel, welcher diesem Punkte O′ homolog ist (§. 89, d), liegt also im unendlichen Raum. Es folgt daraus, dass in der Parabel alle Durchmesser des endlichen Raumes mit einander parallel laufen. In der That, wie jeder Aehnlichkeitsstrahl O′C′ nur der Tangente O′𝔠′, d. i. der Gegenaxe conjugirt ist, so erscheint nur der Durchmesser C𝔖″, welcher mit O′C′ homolog ist, im unendlichen Raum, dagegen entspricht dem Aehnlichkeitsstrahl O′𝔠′ ein Durchmesser des unendliches Raumes, der dem Durchmesser C𝔖″ conjugirt ist.

Die unendliche Länge der Parabeldurchmesser verleiht den conjugirten Sehnen eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Ist nämlich T der Pol einer Sehne (Fig. 100), und PT die Richtung des der Sehne conjugirten Durchmessers, so werden die Punkte P und T dieses Durchmessers durch den Endpunkt C desselben im endlichen Raum und den andern Endpunkt 𝔖 im unendlichen Raum harmonisch getheilt (§. 106), es liegt also der Punkt C in der Mitte zwischen P und T (§. 7).

Geht nun eine Sehne $C\mathfrak{C}$ durch den Brennpunkt F der Parabel (Fig. 102), so liegt der Pol γ derselben auf der Direktrize (§. 151, c) und es ist $C\gamma\mathfrak{C}$ ein rechtwinkliges Dreieck, ein über $C\mathfrak{C}$ beschriebener Kreis geht also auch durch den Punkt γ, der Mittelpunkt E dieses Kreises bezeichnet die Spur des der Sehne zugeordneten Durchmessers der Parabel, es ist also $C\mathfrak{C} = 2\,E\gamma$, auch wird diese Strecke $E\gamma$ durch die Parabel in D halbirt (§. 152, c), also ist $E\gamma = 2\,ED$ und folglich $C\mathfrak{C} = 4\,ED$.

D. Axe der Parabel.

§. 153. Mit dem Parallelismus, welcher zwischen der Axe und den anderen Durchmessern der Parabel stattfindet, hängen folgende Eigenthümlichkeiten der Parabel zusammen:

a) Die Parabel hat nur eine Axe im endlichen Raum; die zweite Axe liegt im unendlichen Raum.

b) Der Scheitel der Parabel liegt in der Mitte zwischen dem Brennpunkt und der Direktrize.

c) Wenn man zu einem Punkt des Parabelumfanges den Brennstrahl die Tangente und Normale zieht, so sind die zwei Abschnitte der Axe, welche zwischen diesen Linien liegen, unter sich und dem Brennstrahl gleich.

d) Die Subnormale eines Punktes des Parabelumfanges ist eine constante Grösse und dem halben Parameter gleich.

e) Jede der Axe conjugirte Sehne ist das geometrische Mittel zwischen dem Parameter und dem Abschnitt, den sie auf der Axe begrenzt.

Man wird bemerken, dass die Sätze a und b besondere Fälle von §. 152, b und §. 151, b sind.

Ist CF (Fig. 99) der Brennstrahl, CT die Tangente, CN die Normale eines Punktes C der Parabelcurve, und zieht man CC'' senkrecht auf die Direktrize $A''C''$, so ist die Gerade CC'' auch die Richtung eines Durchmessers und die eines Brennstrahls des unendlich entfernten Brennpunktes. Die Tangente CT halbirt also den Winkel FCC'' der zwei Brennstrahlen (§. 89, b) folglich, $\quad \angle TCC'' = \angle TCF$

wegen des Parallelismus der Durchmesser ist aber auch

$$\angle TCC'' = \angle CTF,$$

folglich auch $\angle TCF = \angle CTF$ und $FC = FT$.
Ein aus F mit FC beschriebener Kreis geht also durch T und bestimmt auch den Punkt N der Axe, durch welchen die Normale CN geht, daher ist auch $FN = FC$. Zieht man nun auch noch die der Axe conjugirte Sehne C𝔊 (Fig. 103) und bestimmt dadurch die Subnormale PN, so sieht man, dass $PA'' = CC''$, und weil $CC'' = FC = FN$; so ist also $PA'' = FN$ und also auch $FA'' = PN$. Es ist aber $FA'' = 2\,FA$, also halb so gross als der Parameter; diese Grösse kommt also auch (§. 152, d) der Subnormale zu. Weil nun $\triangle$ NCT bei C rechtwinklig ist und CP auf NT senkrecht steht, so ist nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie $PC^2 = PT \,.\, PN$. Nun ist aber $PT = 2\,PA$ (§. 152, c), $PN = \frac{1}{2} \,.\, p$, wenn p den Parameter bezeichnet, folglich auch $PC^2 = PA \,.\, p$, oder die halbe der Axe zugeordnete Sehne ist das geometrische Mittel zwischen dem Parameter und dem Stück, das sie auf der Axe begrenzt.

E. Tangenten der Parabel.

§. 154. Die Parabel hat keine parallelen Tangenten im endlichen Raum, auch keine Asymptoten, die Tangente, welche sie in dem Punkt des unendlichen Raumes berührt, liegt selbst ihrer ganzen Ausdehnung nach im unendlichen Raum. Diese Eigenschaft verleiht auch den Tangenten des endlichen Raumes noch folgende Eigenthümlichkeiten:

a) Jede zwei Tangenten der Parabel werden durch alle übrigen Tangenten proportional getheilt, und zwar verhalten sich zwei beliebige homologe Abschnitte derselben wie die Stücke der zwei gegebenen Tangenten, welche zwischen dem Convergenzpunkt und den Berührungspunkten liegen.

b) Zwei Tangenten, welche in einem Punkte der Axe convergiren, werden durch die übrigen Tangenten uniform getheilt. Zwei homologe Abschnitte derselben sind gleich.

c) Wenn zwei Parabeltangenten in einem Punkt der Axe convergiren, so schneidet jede dritte Tangente, welche zwischen dem Convergenzpunkt der ersteren und der Parabel liegt, zwei Stücke ab, deren Summe constant ist, und jede dritte Tangente, welche nicht zwischen dem Convergenzpunkt der gegebenen Tangenten und der Parabel liegt,

schneidet solche Stücke ab, deren Differenz constant ist. In beiden Fällen ist diese constante Grösse gleich demjenigen Stück einer der gegebenen Tangenten, welches zwischen ihrem Convergenzpunkt und ihrem Berührungspunkt liegt.

d) Wenn man um das Dreieck, das von drei Parabeltangenten gebildet wird, einen Kreis beschreibt, so geht er durch den Brennpunkt der Parabel.

Die Tangente, welche die Parabel in demjenigen Punkt ihrer Curve berührt, der im unendlichen Raum liegt, ist der Gegenaxe O′c′ im System des Leitkreises homolog und liegt folglich ganz im unendlichen Raum (Fig. 59, c). Nun wird aber jedes Paar Tangenten eines Kegelschnittes von den übrigen Tangenten conform getheilt (§. 103, c). Es sind somit auch die Punkte der Parabeltangenten homolog, welche durch die Tangente des unendlichen Raumes auf ihnen bezeichnet werden, damit geht aber die conforme Theilung, welche die Parabeltangenten erfahren, in eine proportionale über (§. 18, a). Nun ist nach §. 103, c der Berührungspunkt einer Tangente dem Punkt einer zweiten Tangente homolog, in welchem sie mit der ersten convergirt, es sind also gerade diejenigen Abschnitte zweier Parabeltangenten homolog, welche zwischen ihren Berührungspunkten und ihrem Convergenzpunkt liegen, und das Verhältniss dieser Abschnitte gibt somit das constante Verhältniss an, welches zwischen den homologen Abschnitten herrscht, in welche sie durch alle übrigen Tangenten getheilt werden.

In dem besondern Fall nun, dass zwei Parabeltangenten in einem Punkte γ der Axe convergiren (Fig. 101), bilden sie mit der Berührungssehne C𝔖 ein gleichschenkliges Dreieck. Denn die Berührungssehne C𝔖 ist der Axe zugeordnet, steht also auf ihr senkrecht und wird durch dieselbe halbirt, also $C\gamma = 𝔖\gamma$. Die proportionale Theilung geht also in diesem besonderen Fall in eine uniforme über (§. 18, b). Zieht man also noch eine dritte Tangente DD′, so wird auch $CD = \gamma D'$, folglich ist $D\gamma + CD = D\gamma + D'\gamma$, vorausgesetzt, dass die Tangente DD′ zwischen der Parabel CA𝔖 und dem Punkt γ hin-

durch geht, und wenn sie dieses nicht thut, so findet man leicht, dass die Summe sich in eine Differenz verwandelt.

Das Stück einer beweglichen Parabeltangente DD' (Fig. 106), das zwischen zwei festen Tangenten $C\gamma$ und $\mathfrak{G}\gamma$ liegt, wird vom Brennpunkt F aus unter einem constanten Winkel DFD' gesehen (§. 132, b). Die Tangente des unendlichen Raumes schneidet die Tangente γC in einem Punkt, der in der Richtung von γ nach C unendlich weit entfernt liegt, die andere Tangente $\gamma\mathfrak{G}$ schneidet sie in einem Punkt, der in der Richtung von $\mathfrak{G}$ nach γ unendlich weit entfernt ist. Zieht man also $FM \parallel \gamma C$ und $FN \parallel \mathfrak{G}\gamma$, so ist $\angle MFN = DFD'$; es ist aber in Folge des Parallelismus obiger Linien auch $\angle MFN = C\gamma\mathfrak{N}$, also auch $\angle DFD' = \angle D\gamma\mathfrak{N}$. Man kann folglich um das Viereck $FD\gamma D'$, das durch die drei Schnittpunkte dreier Parabeltangenten und durch den Brennpunkt bestimmt wird, stets ein Dreieck beschreiben, und umgekehrt, wird eine Kreislinie, die durch die drei ersten Punkte geht, auch durch den vierten gehen.

F. Oberfläche der Parabel.

§. 155. Der Inhalt eines Parabelabschnittes beträgt zwei Drittel von dem Dreieck, das durch die Sehne des Abschnittes und durch die Endtangenten dieser Sehne begrenzt wird.

Ueberhaupt ist das inbeschriebene Vieleck doppelt so gross, als das umbeschriebene Vielseit, dessen Seiten die Parabel in den Eckpunkten des inbeschriebenen Vielecks berühren.

Beschreibt man über einer beliebigen Sehne AE (Fig. 104) ein Dreieck AEC so in die Parabel, dass die Spitze C desselben auf den Scheitel C des der Sehne zugeordneten Durchmessers fällt, und zieht in den Punkten A, E, C Tangenten an die Parabel, welche das umbeschriebene Dreieck a e c bestimmen, so wird auch der Convergenzpunkt c der Tangenten der Punkte A und E auf der Richtung des Durchmessers MC liegen, und es wird $MC = \frac{1}{2}\, Mc$ sein (§. 152, c). Weil überdiess auch $ae \parallel AE$, so findet man leicht, dass $2 \triangle aec = \triangle AEC$.

Construirt man ebenso den Scheitel B des Durchmessers, der der Sehne AC conjugirt ist, und zieht in dem Punkt B die Tangente $\gamma\delta$, so ist aus dem gleichen Grund $\triangle$ ABC = 2 $\triangle\, \gamma\delta$e; folglich auch Viereck ABCE = Viereck ac$\gamma\delta$. Auf diesem Wege fortfahrend, wird man überhaupt bemerken, dass, wenn auch die Eckenzahl des inbeschriebenen Vielecks viel grösser wird, doch dasselbe stets doppelt so gross bleibt, als das umbeschriebene Vielseit. Da somit dieses Verhältniss zwischen dem in- und umbeschriebenen Vieleck von der Seiten-Anzahl unabhängig ist, so ist man zu dem Schluss berechtigt, dass überhaupt der Parabelabschnitt ABCDE der doppelten Fläche ABCDE γ gleich ist, und dass also ABCD E = $^2/_3$ $\triangle$ AEc.

Bei der vorausgehenden Deduktion ist die Lage der Ecken des inbeschriebenen Vielecks nicht beliebig, sondern es sind vielmehr mit der Sehne AE alle übrigen Ecken gegeben. Allein dass auch bei einer beliebigen Lage der Ecken des umbeschriebenen Vielecks der angeführte Satz noch Giltigkeit hat, ist jetzt leicht einzusehen. Denn ist ABC ein ganz beliebiges inbeschriebenes Dreieck, und $\alpha\beta\gamma$ das entsprechende umbeschriebene Dreieck, so schliesst man jetzt

Abschnitt ABMN = 2 . AMNBγ
Abschnitt ACM = 2 . AMCβ
Abschnitt CBN = 2 . BNCα

folglich wenn man die zwei letzteren Gleichungen von der ersten subtrahirt, auch $\triangle$ ABC = 2 $\triangle$ $\alpha\beta\gamma$.

Aufgabensammlung.

I. Harmonische Theilung.

1) Eine gegebene Strecke JJ' in einem gegebenen Verhältniss m : n harmonisch zu theilen.

2) Zu dem Punkt O der Reihe AOC den zugeordneten Punkt der harmonischen Theilung zu finden.

3) Zu dem Strahl OC des Vielstrahls O, ACB den zugeordneten harmonischen Strahl zu finden.

4) Von einem harmonischen Vierstrahl sind ein Strahl $\alpha\beta$ und drei nicht in einer Richtung liegende Punkte A, B, A' gegeben, durch welche die anderen Strahlen gehen sollen; man soll den Scheitel desselben finden.

5) Von einer harmonischen Punktreihe sind ein Punkt O und drei Richtungen AB, AE und BE, welche nicht in einem Punkt convergiren und auf welchen die drei übrigen Punkte liegen sollen, gegeben; man soll die Richtung der harmonischen Reihe finden.

Die Theilung einer gegebenen Strecke JJ' in einem gegebenen Verhältniss m : n ist eine Aufgabe, die in die Elemente der Geometrie gehört. Am einfachsten wird sie durch zwei Parallelen gelöst, die man durch die Punkte J und J' zieht, wenn man auf denselben JA = m, J'A' = n und J'𝔄' = n nimmt, und die Punkte A' und 𝔄' mit A verbindet. Die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit der Richtung JJ' genügen der Aufgabe. Die Aufgabe 2 wird durch die Eigenschaft (§. 41, d) des Vierecks auf linearem Wege gelöst, indem man ein Viereck zeichnet, das in A und C zwei Eckpunkte und eine durch O gehende Diagonale hat; die Aufgabe 3 wird auf 2 zurück geführt, oder man zeichnet (Fig. 9) ein Parallelogramm OABC, das AO und OC zu Seiten und OB zur Diagonalen hat, und zieht OD || AC (§. 31).

In Aufgabe 4 bezeichnet die Richtung AB (Fig. 30) eine Transversale des harmonischen Vierstrahls, deren Schnittpunkt γ mit $\alpha\beta$ bekannt ist; der vierte harmonische Punkt C', der zu den Punkten A, B und γ nach Aufgabe 2 gefunden werden kann, bestimmt mit dem Punkt A' die Richtung A'C' eines zweiten Strahls und den Scheitel β des gesuchten Vielstrahls. Je nachdem der Punkt C' dem einen oder dem andern der Punkte γ, A, B zugeordnet ist, gelangt man zu einer andern Auflösung.

In Aufgabe 5 zieht man OA, so bilden die Richtungen AO, AE und AB einen Dreistrahl, zu welchem man nach Aufgabe 4 den vierten harmonischen Strahl AO' finden kann, der auf der dritten gegebenen Richtung EB einen zweiten Punkt C der gesuchten Punktreihe und die Richtung OC derselben bestimmt. Auch diese Aufgabe hat mehrere Auflösungen.

II. Conforme Punktreihen.

6) Es sind auf den Richtungen MN und M'N' zweier perspektivischen, conformen Punktreihen A, A', B, B' zwei Paare homologer Punkte gegeben; man soll

a) zu einem dritten Punkt C auf MN den homologen Punkt auf M'N' finden;

b) die Gegenpunkte der Reihen suchen.

7) Es ist auf den Richtungen MN und M'N' zweier perspektivischen, proportionalen Punktreihen ein Paar homologer Punkte A, A' gegeben; man soll zu dem Punkt B der Richtung MN den homologen Punkt auf M'N' finden.

8) Es sind auf den Richtungen X'𝔛' und X''𝔛'' zweier (projektivischen) conformen Punktreihen drei Paare homologer Punkte A', A''; B', B''; G', G'' gegeben; man soll

a) zu einem vierten Punkt E' der Richtung M'N' den homologen Punkt auf der Richtung MN finden;

b) die Punkte ihrer Richtungen suchen, welche den in ihrem Convergenzpunkt vereinigten Theilpunkten homolog sind;

c) ihre Gegenpunkte bestimmen.

9) Es sind auf den Richtungen M'N' und M''N'' zweier projektivischen, conformen Punktreihen ein Paar homologer Punkte A' und A''; und ausserdem noch die Punkte B' und C'' gegeben, welche den in ihrem Convergenzpunkt vereinigten Theilpunkten homolog sind; man soll zu einem vierten Punkt D' der Richtung M'N' den homologen Punkt auf M''N'' suchen.

10) Es sind auf den Richtungen M'N' und M''N'' zweier (projekti-

vischen) proportionalen Punktreihen zwei Paar homologer Punkte A′, A″; B′, B″ gegeben; man soll zu einem dritten Punkt C′ der Richtung M′N′ den homologen Punkt auf M″N″ bestimmen.

11) Es sind auf zwei Richtungen M′N′ und M″N″ zweier proportionalen Punktreihen die zwei Punkte gegeben, welche den in ihrem Convergenzpunkt vereinigten Theilpunkten homolog sind; man soll zu einem dritten Punkt D′ der Richtung M′N′ den homologen Punkt auf M″N″ finden.

Liegen zwei Punktreihen perspektivisch wie in Aufgabe 6, so wird durch die Verbindungslinien AA′, BB′ (Fig. 8) zweier Paare homologer Punkte das Projektionscentrum O bestimmt, und ein von da aus nach C gezogener Strahl bezeichnet auf M′N′ den homologen Punkt C′, und zieht man einen Strahl OE parallel mit M′N′, so bezeichnet er auf MN den Gegenpunkt E, und wenn ein Strahl parallel mit MN ist, so bezeichnet er auf M′N′ den Gegenpunkt.

Sind die perspektivischen Reihen proportional wie in Aufgabe 7, so sind ihre Punkte des unendlichen Raumes homolog, ein Projektionsstrahl und daher auch das Centrum liegen im unendlichen Raum. Die Parallelen mit AA′ bezeichnen daher die proportionalen Abschnitte.

Die folgenden vier Aufgaben behandeln die Fälle der projektivischen Lage; die allgemeinen Aufgaben 8 und 9 sind gelegentlich bei §. 37 und 38 besprochen worden; der besondere Fall der proportionalen Reihen projektivischer Lage der Aufgabe 10 und 11 kann ebenfalls nach den Regeln des Allgemeinen aufgelöst werden, wenn man voraussetzt, dass von den Projektionsstrahlen A′A″, B′B″ und G′G″ (Fig. 13) der letztere im unendlichen Raum liege, und daher auch auf den erstern die Centra O′ und O″ im unendlichen Raum bestimme. Zieht man also durch E′ die Richtung E′E ‖ B′B″, bestimmt dadurch den Punkt E auf A′B″, und zieht durch E wieder EE″ ‖ A′A″, so sind E′ und E″ homologe Punkte. Ebenso wird die Aufgabe 11 als ein besonderer Fall von 9 behandelt, wenn man in Fig. 14 voraussetzt, dass der Strahl GG′ im unendlichen Raum liege.

III. Conforme Vielstrahlen.

12) Es sind von zwei conformen Vielstrahlen O und O′, die sich in perspektivischer Lage befinden, zwei Convergenzpunkte α und β zweier Paare von homologen Strahlen gegeben; man soll zu einem dritten Strahl OC des Vielstrahls O den homologen Strahl im Vielstrahl O′ bestimmen.

13) Es sind von zwei conformen Vielstrahlen O′ und O″ drei

Paare ihrer homologen Strahlen gegeben, welche in den Punkten A'', Q, B' convergiren; man soll

a) zu dem Strahl O'E' des Vielstrahls O' den homologen Strahl im Vielstrahl O'' suchen;

b) die zwei Strahlen ziehen, welche den in der Scheitellinie O'O'' vereinigten homolog sind.

14) Es sind von zwei conformen Vielstrahlen O' und O'' ein Paar homologer Strahlen, welche in dem Punkt Q convergiren, und ausserdem noch die Strahlen O'C' und O''D'' gegeben, welche den in der Scheitellinie vereinigten Strahlen homolog sind, man soll zu dem Strahl O'E' des Vielstrahls O' den homologen Strahl im Vielstrahl C'' aufsuchen.

Die Aufgabe 12 über die perspektivischen Vielstrahlen wird leicht durch §. 32 erledigt, und die zwei nachfolgenden 13 und 14 wurden in §. 39 und 40 besprochen, so dass ihre Auflösung keinen Anstand haben kann (vergl. Fig. 15 u. 16).

IV. Conforme Reihen gleicher Richtung und conforme concentrische Vielstrahlen.

15) Es sind zwei conforme Punktreihen, welche in einer Richtung vereinigt sind, durch drei Paare homologer Punkte CC', DD', EE' gegeben; man soll

a) zu einem Punkt F der einen Reihe den homologen Punkt der anderen Reihe aufsuchen;

b) die Gegenpunkte der zwei Reihen finden;

c) die Hauptpunkte bestimmen, wenn solche vorhanden sind.

16) Es sind eine Strecke AB und zwei Punkte C, C' ihrer anharmonisch proportionalen Theilung gegeben; man soll

a) zu einem Punkt D der einen Reihe den zugeordneten Punkt der anderen Reihe suchen;

b) die Gegenpunkte bestimmen.

17) Es sind auf der Richtung MN zwei einander zugeordnete Punkte A, A'; B, B' gegeben; man soll den Anfangspunkt finden, den sie proportional umhüllen.

18) Es sind zwei conforme, concentrische Vielstrahlen durch drei Paare von Strahlen PC, PC'; PD, PD'; PE, PE' gegeben, man soll

a) zu einem weiteren Strahl PF den homologen finden;

b) die Hauptstrahlen bestimmen, wenn solche vorhanden sind.

Die Aufgaben über conforme Punktreihen gleicher Richtung, und über conforme Vielstrahlen gemeinschaftlichen Scheitels lassen sich auf die Aufgaben der zwei vorausgehenden Abschnitte zurückführen, dadurch dass man auf ein drittes conformes Gebilde übergeht, welches mit einem der gegebenen conform ist und perspektivisch gegen dasselbe liegt, und nun die Aufgabe zwischen diesem Hilfsgebilde und dem anderen gegebenen Gebilde ausführt, hierauf zu dem gefundenen Element seinerseits wieder das homologe in dem ersten Gebilde, mit dem es perspektivisch liegt, aufsucht. Auch kann man, was die letzte Aufgabe 18 anbelangt, eine Aufgabe über den Vielstrahl jeder Zeit leicht in eine Aufgabe über die Punktreihe verwandeln, in dem man statt des Vielstrahls eine Punktreihe substituirt, welche durch irgend eine Transversale des Vielstrahls bestimmt wird. Die Lösung der Aufgabe, welche auf einem dieser Wege vollzogen wird, ist dadurch ausgezeichnet, dass sie stets eine rein lineare Construktion mit sich bringt, und ist daher für die Theorie von grossem Werth, und dem Anfänger stets zu empfehlen.

Es gibt jedoch noch eine zweite Methode, welche sich an die centrische Collineation coincidirender Kegelschnitte hält, und welcher der Vorzug der Einfachheit zukommt. Statt des Kegelschnitts wählt man natürlich einen Kreis. Es mögen daher noch die nöthigen Anweisungen für die Lösung der obigen Aufgaben nachfolgen, wenn in der Ebene der Construktion ein Kreis gegeben oder zu ziehen gestattet ist. Diese zweite Methode ist besonders dann die nächstliegende, wenn die gegebenen Stücke aus Vielstrahlen bestehen, es mag daher die letzte Aufgabe (18) zuerst in's Auge gefasst werden. Zieht man nun einen Kreis, der durch den gemeinschaftlichen Scheitel P (Fig. 113) der Vielstrahlen geht, so bestimmen die Strahlen derselben die Punkte γ, γ'; δ, δ'; ε, ε' und φ auf der Kreislinie, welche sich als homologe Punkte zweier centrisch collineären Systeme verhalten, die die Kreislinie entsprechend gemein haben. Construirt man nun nach §. 129 auch die Gerade $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, welche beiden Systemen entsprechend gemein ist, so darf man nur die Gerade $\varphi\,\gamma'$ ziehen, ihren Schnittpunkt $\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ bemerken, durch denselben die Gerade $\gamma\,\mathfrak{f}$ ziehen, so wird dieselbe auf der Kreislinie den Punkt φ' bezeichnen, durch welchen der Strahl PF' geht, der dem Strahl PF homolog sein soll. Ist die Gerade $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ eine Sekante des Kreises, so haben die angegebenen concentrischen Vielstrahlen zwei Hauptstrahlen P$\mathfrak{a}$ und P$\mathfrak{b}$, welche mit der Geraden $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Kreislinie convergiren. Sollte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ den Kreis berühren, so hätten die zwei concentrischen Vielstrahlen nur einen Hauptstrahl, welcher durch den Berührungspunkt gehen würde. Sollte

aber $\mathfrak{ab}$ ausserhalb der Kreislinie liegen, so haben die concentrischen Vielstrahlen keinen Hauptstrahl.

Die Aufgaben über die Punktreihen 15, 16, 17 werden auf die so eben besprochene zurückgeführt. Man zeichnet nämlich zur Lösung von 15. eine Kreislinie und einen Vielstrahl, dessen Scheitel P auf derselben liegt, und dessen Strahlen durch die Punkte C, C'; D, D'; E, E' gehen, dadurch erhält man zwei mit ihrem Scheitel in P vereinigte Vielstrahlen. Zwei homologe Strahlen dieser Vielstrahlen bestimmen auch zwei homologe Punkte auf MN. Die Hauptstrahlen dieses Vielstrahls bezeichnen auch die Hauptpunkte der gegebenen Reihen. Aber auch die Gegenpunkte lassen sich finden, wenn man durch P eine Parallele mit MN zieht, welche auf der Kreislinie im Allgemeinen zwei Punkte ξ und ξ' bezeichnen. Die zu Pξ und Pξ' homologen Strahlen der Vielstrahlen in P, welche nach der oben angeführten Methode gefunden werden, bezeichnen auf MN die Gegenpunkte der gegebenen Reihen.

Die anharmonisch proportionale Theilung einer gegebenen Strecke ist ein besonderer Fall des Vorausgehenden, wobei die Hauptpunkte der Reihen gegeben sind. Die Construktion wird dadurch etwas einfacher, dass man den Hilfskreis durch die Hauptpunkte A und B zieht. Nun kann man zu dem Vielstrahl P, ABCC', Fig. 114, dessen Strahlen durch die Punkte C und C' gehen, und noch auf der Kreislinie die Punkte γ und γ' bestimmen, einen zweiten conformen Vielstrahl zeichnen, dessen Scheitel P' durch die Richtung der Geraden γD bestimmt wird. Der Strahl P'γ' wird auf AB den Punkt D' angeben, der dem Punkt D zugeordnet ist. Ganz auf demselben Wege gelangt man auch zu den Gegenpunkten Q und Q', wenn man den Scheitel P' Fig. 115, des conformen Vielstrahls vermittelst einer Parallelen von AB, die durch γ' geht, oder den Scheitel des Vielstrahls P'' vermittelst einer Parallelen von AB, die durch γ geht, bestimmt.

Die Aufgabe 17, ein besonderer Fall von 15, kann man dadurch auflösen, dass man über AA', über und unter BB' ähnliche Dreiecke zeichnet, und ihre Spitzen durch Gerade verbindet. Diese letzteren bezeichnen zwei Punkte, von welchen jeder der Aufgabe entspricht.

V. Involution einförmiger Gebilde.

19) Von einer involutorischen Punktreihe sind zwei Paare von Punkten B, B'; C, C' (α, α'; β, β') gegeben; man soll

a) zu einem fünften Punkt D (γ') den homologen aufsuchen;

b) den Centralpunkt der Involution bestimmen;

c) die Hauptpunkte finden, wenn solche vorhanden sind.

20) **Von einem involutorischen Vielstrahl P sind zwei Paare von Strahlen PA, PA′; PB, PB′ gegeben: man soll**

a) zu einem fünften Strahl PC den homologen aufsuchen;

b) die Normalstrahlen ziehen;

c) die Hauptstrahlen bestimmen, wenn solche vorhanden sind.

21) Es sind zwei concentrische involutorische Vielstrahlen P, AA′ BB′ und P, 𝔄𝔄′𝔅𝔅′ gegeben, man soll diejenigen zwei Strahlen aufsuchen, welche hinsichtlich beider Involutionen einander zugeordnet sind.

22) Es sind zwei in einer Richtung vereinigte involutorische Reihen, AA′ BB′ und 𝔄𝔄′𝔅𝔅′ gegeben, man soll diejenigen zwei Punkte aufsuchen, welche hinsichtlich beider Involutionen einander zugeordnet (homolog) sind.

Die Aufgaben über involutorische einförmige Gebilde können auf linearem Wege, vermittelst der Eigenschaften des Vierecks §. 114. a und d aufgelöst werden. Zieht man nämlich in Aufgabe 19, a von den gegeben Punkten α', β', γ' (Fig. 124) der einen Reihe nach einem beliebigen Punkt A drei Richtungen, und nimmt sodann auf dem Strahl $A\gamma'$, der durch den Punkt γ' geht, dessen homologer Punkt gesucht ist, einen anderen beliebigen Punkt B, und projicirt von demselben aus die Punkte α und β auf die Strahlen $A\beta'$ und $A\alpha'$, so bestimmen die Projektionen D und C die Richtung CD, welche unmittelbar den gesuchten Punkt γ der Involution liefert. Hatte man $A\gamma' \parallel \alpha\alpha'$ gezogen, so würde γ den Centralpunkt der Involution angegeben haben.

Ein anderes Mittel zur Construktion involutorischer Gebilde liefert übrigens auch die Involution der Kegelschnitte, und insbesondere die des Kreises. Die gegebenen Strahlen eines involutorischen Vielstrahls bestimmen nämlich auf einer Kreislinie, welche durch den Scheitel P (Fig. 108) des Vielstrahls geht, zwei Paare von homologen Punkten B, B′; C, C′ der Kreisinvolution, deren Centrum O im Convergenzpunkt A der Geraden BB′, CC′ liegt, und deren Axe $\beta\beta'$ durch die Convergenzpunkte der übrigen Verbindungslinien geht. Jeder weitere Strahl bezeichnet zwei weitere homologe Punkte der Kreislinie, welche, mit P verbunden, zwei homologe Strahlen des Vielstrahls P liefern. Der Centralstrahl AA′ (Fig. 110 und 111) führt zu denjenigen Punkten der Kreisinvolution, welche die Normalstrahlen PA und PA′ bestimmen. Nur wenn das Centrum O der Kreisinvolution ausserhalb des Kreises liegt, so existiren zwei Hauptpunkte M und N, welche, mit P verbunden, die Hauptstrahlen des involutorischen Vielstrahls liefern. (Fig. 111.)

Auch die Aufgabe über die involutorische Punktreihe kann durch die Kreisinvolution gelöst werden, wenn man durch zwei homologe Punkte B und B' eine Kreislinie zieht und in dieselbe einen involutorischen Vielstrahl zeichnet, dessen Scheitel P auf der Kreislinie liegt (Fig. 116) und dessen Strahlen durch die Punkte B, B', C, C' gehen und auf der Kreislinie die Punkte γ und γ' bezeichnen. Die Geraden B B' und $\gamma\,\gamma'$ bestimmen das Centrum O der Kreisinvolution, der Strahl Pδ' der zu Pδ gehört, bezeichnet den Punkt D', der dem Punkt D homolog ist. Wenn das Centrum O ausserhalb des Kreises liegt, so führen die Hauptpunkte der Kreisinvolution zu den Hauptpunkten der involutorischen Reihe. Der Centralpunkt Q der involutorischen Reihe wird durch denjenigen Strahl Pξ' bestimmt, welcher durch den Punkt ξ geht, der selbst dem Punkt ξ' homolog ist, der durch einen Strahl bezeichnet wird, der mit BB' parallel läuft.

In Betreff der Aufgabe 21 zieht man einen Kreis durch den Scheitelpunkt P (Fig. 126), sucht zu den involutorischen Punkten AA'BB' den Pol O der Kreisinvolution, welcher durch die Richtungen AA' und BB' bestimmt wird (§. 106), bestimmt ebenso auch den Pol $\mathfrak{O}$ des Kreisinvolution $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, verbindet die Pole O und $\mathfrak{O}$ durch eine Gerade, so wird diese die Kreislinie in zwei Punkten M und N schneiden, in einem Punkt R berühren, oder ganz ausserhalb des Kreises liegen. Im ersten Fall sind PM und PN zwei Strahlen, welche der Aufgabe genügen, im zweiten Fall ist PR ein beiden Involutionen gemeinschaftlicher Hauptstrahl, im dritten Fall ist die Aufgabe unmöglich. Die Aufgabe 22 wird auf 21 zurückgeführt.

VI. Einige Anwendungen der Conformität und Involution.

23) Es sind auf einer Richtung MN zwei Paare von Punkten B, B'; C, C' gegeben; man soll ein drittes Paar von Punkten finden, welches jedes der gegebenen Paare harmonisch trennt.

24) Es sind in einer Ebene zwei Gerade DB und CF, deren Convergenzpunkt unbekannt ist, und ein Punkt E gegeben; man soll eine dritte Gerade ziehen, welche mit den gegebenen Geraden in einem Punkt convergirt.

25) Es sind zwei Punkte A und C gegeben, zwischen welchen die gerade Verbindungslinie Hindernisse halber nicht gezogen werden kann; man soll durch blosse lineare Construktion noch einen dritten Punkt auf der Richtung AC bestimmen.

26) Es sind vier Punkte A, B, C, D einer Richtung gegeben; man soll einen fünften Punkt ausserhalb derselben finden, der die Eigenschaft habe, dass die von ihm aus nach den gegebenen Punkten gezogenen Geraden drei gleiche Winkel mit einander machen.

27) Es sind drei Punkte A, B, C in einer Ebene gegeben, welche nicht in einer Richtung liegen; man soll einen vierten Punkt aufsuchen, dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten sich zu einander verhalten wie drei gegebene Grössen m, n und p.

28) Es sind zwei Dreiecke ABC und A'B'C' gegeben, man soll ein drittes Dreieck zeichnen, welches in das erste und zugleich um das zweite beschrieben sei.

29) Es sind zwei conforme projektivische Punktreihen A'', B'', G'' und A', B', G' in einer Ebene gegeben; man soll durch einen ausserhalb ihrer Richtung liegenden Punkt P eine Gerade so ziehen, dass sie zwei homologe Punkte der gegebenen Reihen verbinde.

30) Es sind zwei conforme projektivische Vielstrahlen O'' und O' durch drei Paare homologer Strahlen gegeben, welche in den Punkten A', B'', Q convergiren; man soll auf einer gegebenen Richtung MN, die nicht durch die Scheitel der Vielstrahlen geht, denjenigen Punkt aufsuchen, in welchem zwei homologe Strahlen der Vielstrahlen convergiren.

31) Es sind ein Dreieck ABC und zwei Punkte D und E, die nicht auf seinem Umfang liegen, gegeben; man soll ein Viereck so um das Dreieck ABC beschreiben, dass dessen Gegenseiten paarweise in den Ecken des Dreiecks ABC convergiren, und dass überdiess jedes Paar seiner Gegenseiten sowohl durch die in demselben Eck convergirenden Seiten des Dreiecks ABC, als auch durch die gegebenen Punkte D und E harmonisch getrennt werden.

32) Es sind ein Dreiseit ABC und zwei Richtungen d und e, die nicht auf dem Umfang convergiren, gegeben, man soll ein Vierseit so in das Dreieck ABC beschreiben, dass dessen Gegenecken paarweise auf den Seitenrichtungen des Dreiecks liegen, und dass überdiess jedes Paar dieser Gegenecken sowohl durch die auf derselben Richtung liegenden Ecken des Dreiecks ABC, als auch durch die gegebenen Richtungen d und e harmonisch getrennt werden.

Die zwei gesuchten Punkte in Aufgabe 23 sind die Hauptpunkte der Involution BB' CC', welche nach Aufg. 19 c. gefunden werden. Die Aufgaben 24 und 25 werden durch die Eigenschaften des Vierecks §§. 60 und 61 aufgelöst.

Die Aufgaben 26 und 27 beruhen auf folgender Eigenschaft des Kreises: Theilt man den Durchmesser BB' eines Kreises (Fig. 117) durch zwei Punkte A und C harmonisch, so wird jeder Peripheriewinkel APC des Kreises durch die Sehne PB halbirt, welche in demselben liegt. Dass diess wirklich der Fall ist, wird man einsehen, wenn man bemerkt, dass der Vierstrahl P, B'ABC harmonisch ist und

dass die Strahlen PB und PB′ senkrecht auf einander stehen (§. 72 d). Auch wird man bemerken, dass die Strecken PA und PC ein constantes Verhältniss zu einander haben, welches dem Verhältniss AB und BC gleich ist. Sind nun vier Punkte A, B, C, D einer Richtung gegeben, und sucht man einen fünften B′, der mit B die Punkte A, C harmonisch trennt, und beschreibt sodann über BB′ einen Kreis, sucht hierauf einen sechsten Punkt C′, der mit C die Punkte B und D harmonisch trennt, und beschreibt auch über CC′ als Durchmesser einen Kreis, so wird ein jeder Schnittpunkt der Curven der zwei Hilfskreise die in Aufgabe 26 verlangte Eigenschaft haben. Sind drei Punkte A, B, C gegeben, die nicht in einer Richtung liegen, so kann man die Strecke AB im Verhältniss von m : n durch einen Punkt D theilen, den Punkt D′ suchen, der mit D die Strecke AB harmonisch theilt, und über DD′ als Durchmesser einen Kreis beschreiben. Ebenso theilt man hierauf auch die Strecke BC durch einen Punkt E im Verhältniss von n : p, sucht zu E den zugeordneten Punkt E′ der harmonischen Theilung der Strecke BC und beschreibt über EE′ als Durchmesser einen zweiten Kreis, so wird jeder Schnittpunkt dieser zwei Hilfskreise der Aufgabe 27 entsprechen.

Hinsichtlich der Aufgabe 28 kann man auf AB (Fig. 118) einen beliebigen Punkt α nehmen, durch den Eckpunkt A′ eine Gerade ziehen, welche auf AC den Punkt α' bestimmt, hierauf von α' aus wieder eine Gerade durch B′ ziehen, welche auf BC den Punkt α'' bestimmt, und endlich wieder von α'' durch C′ eine Gerade ziehen, welche die Seite AB wieder in einem Punkte $\mathfrak{a}$ trifft. Sollten die Punkte α und $\mathfrak{a}$ zusammenfallen, so wäre die Aufgabe gelöst, geschieht diess aber nicht, so kann man einen zweiten Punkt β nehmen und ganz wie das erste Mal verfahren, bis man wieder zu einem Punkt $\mathfrak{b}$ auf AB gelangt. Nun muss noch von einem dritten Punkt γ der Geraden BC ausgehend das Gleiche geschehen, um zu einem dritten Punkt $\mathfrak{c}$ derselben Richtung zu kommen. So fortfahrend, wird man auf BC zwei Reihen α, β, γ .. und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ .. gewinnen, welche conform sind. Die zwei Hauptpunkte dieser Reihen, welche nach Aufgabe 15 schon durch die 3 Punktpaare α, $\mathfrak{a}$; β, $\mathfrak{b}$; γ, $\mathfrak{c}$ gefunden werden, haben offenbar die Eigenschaft, dass von ihnen ausgehend ein Dreieck beschrieben werden kann, welches der Aufgabe genügt.

Die Aufgaben 29 und 30 werden auf 28 zurückgeführt. Denn sind A″, B″, G″, E″ und A′, B′, G′, E′ (Fig. 119) zwei conforme Reihen, so bilden die Richtungen dieser Reihen mit den Verbindungslinien A′A″, B′B″, G′G″ und E′E″ ein Sechsseit A″O″O′B′E′E″, dessen Diagonalen der gegenüberstehenden Ecken in einem Punkte E convergiren (§. 37). Geht nun E′E″ durch den gegebenen Punkt P, so ist EE′E″ ein Dreieck, das dem Dreieck A″B′Q inbeschrieben, und dem

Dreieck $O' O'' P$ umbeschrieben ist. Zeichnet man also das Dreieck $EE'E''$ auf diese Weise nach Aufg. 28, so genügt die Gerade $E' E''$ der Aufgabe. — Sind gleichermassen O' und O'' (Fig. 120) zwei conforme Vielstrahlen, bei welchen vier Paare von homologen Strahlen in den Punkten A', Q, B'', E convergiren, so ist $A' QB'' O' EO''$ ein Sechseck, dessen gegenüberstehende Seiten in den Punkten E'', O, E' einer Richtung convergiren (§. 40). Liegt nun aber der Punkt E auf der gegebenen Geraden MN, so ist $EE'E''$ ein Dreieck, das dem Dreieck QMN inbeschrieben und dem Dreieck $O O' O''$ umbeschrieben ist. Zeichnet man also das Dreieck $EE'E''$ auf eben diese Weise, so sind $O'E'$ und $O'' E''$ die zwei gesuchten Strahlen.

Hinsichtlich der Aufgabe 31 wird man von A aus nach Aufg. 23 die Richtungen AM und AN so ziehen, dass sie sowohl die Seiten AB und AC, als auch die Richtungen AD und AE harmonisch trennen, und sodann von B aus die Richtungen BM und BN so ziehen, dass sie die Richtungen BA und BC, sowohl als auch die Richtungen BD und BE harmonisch trennen. Diese vier Richtungen werden unmittelbar die Ecken M, N, S, T des gesuchten Vierecks liefern. Ganz ähnlich behandelt man die Aufgabe 32.

VII. Perspektivische Collineation.

33) Es sind das Centrum O, die Axe $X\mathfrak{X}$, und zwei homologe Punkte A und A' zweier perspektivischer, collineärer Systeme gegeben; man soll

a) zu einem Punkt B des einen Systems den homologen Punkt des andern Systems finden;
b) zu einer Geraden $D\delta$ des einen Systems die homologe Gerade des andern Systems zeichnen;
c) die Gegenaxen construiren;
d) den Modulus der Collineation bestimmen.

34) Es sind das Centrum O, die Axe $X\mathfrak{X}$ und die Gegenaxe $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zweier perspektivischer, collineärer Systeme gegeben; man soll

a) die andere Gegenaxe zeichnen;
b) zu einem Punkt A des einen Systems den homologen Punkt des andern Systems suchen;
c) zu einer gegebenen Geraden $A\alpha$ des einen Systems die homologe Gerade des andern Systems ziehen.

35) Man soll die Collineationsaxe zweier perspektivischer Systeme bestimmen, wenn gegeben sind:

a) das Centrum O und die zwei Gegenaxen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$;

b) das Centrum O, ein Paar homologer Punkte A, A′ und ein Paar homologer Geraden $B\beta$ und $B'\beta$.

36) Man soll das Collineationscentrum zweier perspektivischer Systeme finden, wenn gegeben sind:

a) zwei Paare homologer Punkte A, A′; B, B′;

b) ein Paar homologer Punkte A, A′, die Collineationsaxe X𝔛 und eine Gegenaxe 𝔄𝔅;

c) ein Paar homologer Punkte A, A′, die Collineationsaxe X𝔛 und der Modulus m : n der Collineation.

37) Man soll die Axe und das Centrum zweier perspektivischer Systeme finden, wenn gegeben sind:

a) zwei Paare homologer Punkte A, A′; B, B′ und eine Gegenaxe 𝔄𝔅;

b) ein Paar homologer Punkte A, A′ und die zwei Gegenaxen 𝔄𝔅, 𝔄′𝔅′.

Sind das Centrum O, die Axe X𝔛 und überdiess zwei homologe Punkte A, A′ gegeben (Fig. 21), so kann man zwei homologe Gerade $A\gamma$ und $A'\gamma$ ziehen, von welchen die erste durch den gegebenen Punkt B geht, alsdann wird der Collineationsstrahl OB auf der letzteren den Punkt B′ bestimmen, welcher dem ersteren homolog ist. — Soll aber zu einer Geraden $D\delta$ des ersten Systems die homologe Richtung des zweiten Systems gefunden werden, so darf man nur zu einem Punkt D derselben, den homologen Punkt D′ aufsuchen, so ist $D'\delta$ die verlangte homologe Richtung des zweiten Systems. Die Punkte 𝔅 und ℭ′ der zwei Gegenaxen werden gefunden, wenn man zu den homologen Richtungen $A\alpha$ und $A'\alpha$ die parallelen Collineationsstrahlen zieht, welche mit jenen Richtungen in den gesuchten Punkten 𝔅 und ℭ′ (Fig. 22) convergiren. Zieht man durch diese Punkte Parallele mit der Axe X𝔛, so sind dieselben die gesuchten Gegenaxen. Schneidet der Collineationsstrahl O𝔅 die Axe in dem Punkt 𝔟, so ist das Verhältniss 𝔅𝔟 : O𝔅 dem Modulus der Collineation gleich.

Ist ausser dem Centrum O und der Axe X𝔛 auch noch eine Gegenaxe 𝔅ℭ gegeben, so kann man sogleich auch die andere Gegenaxe zeichnen, weil man weiss, dass die zwei Gegenaxen symmetrisch gegen das Centrum O und die Axe X𝔛 liegen (§. 47, d), auch kann man nach §. 47, e. zu einer gegebenen Geraden $A\alpha$ des ersten Systems die homologe Gerade $A'\alpha$ des andern Systems finden, und nun wird auch ein Collineationsstrahl OA auf der homologen Richtung $A'\alpha$, den Punkt A′ bestimmen, der dem Punkt A homolog ist.

Die übrigen Aufgaben 35—37 können füglich dem Nachdenken des Lesers überlassen bleiben.

VIII. Involutorische Collineation.

38) Es ist das Centrum O und die Axe X𝔛 zweier involutorischen Systeme gegeben; man soll

a) die Gegenaxe finden;

b) zu einer gegebenen Geraden AB des einen Systems die homologe Richtung des andern Systems suchen;

c) zu einem gegebenen Punkt A des einen Systems den homologen des andern Systems finden.

39) Man soll das Centrum finden, wenn gegeben sind ein Paar homologer Punkte A und A', und die Axe X𝔛.

40) Man soll die Axe finden, wenn gegeben sind das Centrum O und ein Paar homologer Richtungen $A\alpha$ und $A\alpha'$.

41) Man soll das Centrum und die Axe finden, wenn gegeben sind:

a) zwei Paare homologer Punkte A, A'; B, B';

b) zwei Paare homologer Richtungen $A\alpha$, $A'\alpha$; $B\beta$, $B'\beta$;

c) ein Paar homologer Punkte A, A' und ein Paar homologer Richtungen $B\beta$, $B'\beta$.

Die Gegenaxe einer involutorischen Collineation kann nach §. 48 c. construirt werden, die Aufgaben 38, b. und c. reduziren sich ebendamit auf 34, b. und c. Die folgenden Aufgaben finden durch die Eigenschaften §. 48, a. und b. ihre Erledigung, und die Aufgabe 41 c. reduzirt sich namentlich hiedurch auf die Aufgabe 23.

IX. Collineation perspektivischer affiner Systeme.

42) Die Axe X𝔛 und ein Paar homologer Punkte, A und A' sind gegeben; man soll

a) zu einem Punkt B des einen Systems den homologen Punkt des affinen Systems finden;

b) zu einer Geraden $B\beta$ des einen Systems die homologe Richtung des affinen Systems suchen.

43) Es sind zwei Paare homologer Richtungen $A\alpha$, $A'\alpha$; $B\beta$, $B'\beta$ gegeben, man soll die Axe und das Centrum der affinen Systeme finden.

Diese Aufgaben reduziren sich auf diejenige von 33, wenn man bemerkt, dass das Centrum O im unendlichen Raum liegt, und bedürfen daher keiner weitern Erklärung.

X. Collineation perspektivischer ähnlicher Systeme.

44) Der Aehnlichkeitspunkt O und ein Paar homologer Punkte A und A′ sind gegeben; man soll

a) zu einem Punkt B des einen Systems den homologen Punkt des ähnlichen Systems finden;

b) zu einer Richtung BC des einen Systems die homologe Richtung des andern Systems suchen.

45) Der Aehnlichkeitspunkt O und ein Paar homologer Richtungen AB, A′B′ sind gegeben; man soll

a) zu einem Punkt C des einen Systems den homologen Punkt C′ des ähnlichen Systems finden;

b) zu einer Richtung DE des einen Systems die homologe Richtung des ähnlichen Systems suchen.

46) Es sind zwei homologe Punkte A, A′ und zwei homologe Richtungen BC und B′C′ zweier ähnlichen Systeme gegeben; man soll den Aehnlichkeitspunkt der Systeme bestimmen.

Diese Aufgaben werden keine Schwierigkeit darbieten, wenn man sich erinnert, dass jede zwei homologen Geraden parallel sind, und in Betreff 46 bemerkt, dass dieselbe auf Aufgabe 17 reduzirt werden kann, übrigens zwei Auflösungen zulässt.

XI. Collineation projektivischer Systeme.

47) Es sind die homologen Vierecke ABCD und A′B′C′D′ zweier projektivischer collineärer Systeme gegeben; man soll

a) zu einer Richtung EF des einen Systems die homologe Richtung des andern Systems aufsuchen;

b) zu einem Punkt G des einen Systems den homologen Punkt des andern Systems construiren;

c) die Gegenaxen der zwei Systeme zeichnen.

48) Es sind die homologen Dreiecke ABC und A′B′C′ zweier affinen Systeme gegeben; man soll

a) zu einer Richtung EF des einen Systems die homologe Richtung des andern Systems suchen;

b) zu einem Punkt D des einen Systems den homologen Punkt des andern Systems bestimmen.

49) Es sind die homologen Punkte A, A′, B, B′ zweier ähnlichen Systeme gegeben; man soll

a) zu einem Punkt C des einen Systems den homologen Punkt des andern Systems bestimmen;

b) zu einer Richtung DE des einen Systems die homologe Richtung des andern Systems zeichnen.

Der Convergenzpunkt Q der Gegenseiten AB und CD ist dem Convergenzpunkt Q' der homologen Seiten A'B', C'D' homolog. Auf den ersteren Seiten AB und CD werden durch die Richtung EF die Punkte E und F bestimmt, nimmt man nun auf den homologen Richtungen des zweiten Systems die Punkte E' und F' so dass ABQE $\barwedge$ A'B'Q'E', CDQF $\barwedge$ C'D'Q'F', so ist die Richtung E'F' des zweiten Systems der Richtung EF des ersten Systems homolog. Soll nun auch zu einem Punkt G des ersten Systems der homologe Punkt im zweiten System gefunden werden, so darf man nur durch denselben zwei Richtungen legen, und im zweiten System die homologen Richtungen aufsuchen, so wird auch der Convergenzpunkt G' der letzteren dem Punkt G des ersten Systems homolog sein. Bestimmt man ferner auf den conformen Punktreihen ABQ und A'B'Q' die Gegenpunkte P und $\mathfrak{P}'$ und ebenso auf den conformen Punktreihen CDQ und C'D'Q' die Gegenpunkte R und $\mathfrak{R}'$ nach Aufg. 8 c, so sind PR und $\mathfrak{P}'\mathfrak{R}'$ die Gegenaxen der zwei Systeme.

Sind in Aufg. 48 E und F Punkte der Richtungen AB, AC, so wird man E' und F' auf den homologen Richtungen A'B' und A'C' so nehmen, dass die Punktreihen ABE und A'B'E'; ACF und A'C'F' proportional sind, so ist auch E'F' homolog EF. Die homologen Punkte der Systeme werden im Allgemeinen durch zwei Paare in denselben convergirender Richtungen bestimmt. Es scheint überflüssig, Erläuterndes über 49 hinzuzufügen.

XII. Polarität des Kreises.

50) Es ist ein Kreis gegeben; man soll

a) zu einem beliebigen Punkt O in der Ebene des Kreises die Polare finden;

b) zu einer beliebigen Richtung $\alpha\alpha'$ den Pol suchen.

51) Es ist eine Kreislinie und in ihrer Ebene ein Punkt A und eine Richtung $\alpha\alpha'$ gegeben; man soll

a) auf der Richtung $\alpha\alpha'$ den Punkt suchen, welcher dem Punkt A conjugirt ist;

b) durch den Punkt A eine Gerade ziehen, welche der Richtung $\alpha\alpha'$ conjugirt ist.

52) Es ist eine Kreislinie gegeben, deren Mittelpunkt unzugänglich ist; man soll

a) von einem gegebenen Punkt P ausserhalb der Kreislinie eine Tangente an den Kreis ziehen;

b) durch einen Punkt C auf der Kreislinie eine Tangente an den Kreis ziehen;

c) zu einer gegebenen Richtung MN die Richtung des auf ihr senkrechten Durchmessers bestimmen;

d) mit der gegebenen Richtung MN eine parallele Tangente ziehen.

53) Einen Kreis zu construiren, welcher einen gegebenen Punkt O und eine gegebene Richtung MN zu Pol und Polaren hat und überdiess noch

a) durch einen gegebenen Punkt C geht;

b) eine gegebene Richtung RS berührt.

Die Auflösung der Aufgaben 50 ist gelegentlich bei §. 70 gegeben worden, diejenige von 51 reduzirt sich auf 50, sobald man den Begriff der conjugirten Punkte und Richtungen §. 75, a. in Anwendung bringt. Die Aufgaben 52 sind eine Anwendung von 50; denn die Polare des Punktes P bestimmt auf der Kreislinie die Berührungspunkte der Tangenten (§. 71, e). Zieht man durch den Punkt C der Kreislinie eine beliebige Sekante C𝔊 und bestimmt ihren Pol γ nach Aufg. 50, b, so geht durch diesen Punkt γ die Tangente des Punktes C. Sucht man auf einer Richtung MN nach 50 zwei Paare conjugirter Punkte A, A′ B, B′, und sodann nach 19, b. den Centralpunkt Q der Involution A A′ B B′, so geht durch denselben der Durchmesser des Kreises, welcher auf MN senkrecht steht, und dieser Durchmesser bezeichnet auf der Kreislinie die Punkte D und D′ der mit MN parallelen Tangenten. Zieht man in Betreff der Aufgabe 53 die Richtung OC, bestimmt ihren Schnittpunkt 𝔇 mit MN, so ist der vierte harmonische Punkt 𝔊 zu OC𝔇 ein zweiter Punkt auf der Kreislinie. Die senkrechte Halbirungslinie der Strecke C𝔊, und die Richtung der Senkrechten, welche man von O auf MN fällt, bestimmen den Mittelpunkt J des gesuchten Kreises. Aehnlich löst man auch die Aufgabe 53, b.

XIII. Aehnlichkeit der Kreise.

54) Man soll die Aehnlichkeitspunkte bestimmen:

a) zwischen zwei Kreisen J und J′;

b) zwischen einem Kreis J und einem Punkt P;

c) zwischen einem Kreis J und einer Geraden MN.

55) Es sind zwei Kreise in einer Ebene gegeben; man soll

a) zu einem gegebenen Punkt C auf der Curve des einen Kreises den homologen Punkt im andern Kreis finden, welcher durch die perspektivische Lage der ähnlichen Curven bestimmt wird;

b) zu einer gegebenen Richtung MN des einen Kreises die perspektivisch homologe Richtung im andern Kreis suchen;

c) zu einem beliebigen Punkt P in der Ebene des einen Kreises den perspektivisch homologen Punkt im anderen Kreis bestimmen;
d) durch einen Punkt C auf dem Umfang des einen Kreises einen Aehnlichkeitsstrahl ziehen;
e) durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene der Kreise einen Aehnlichkeitsstrahl ziehen;
f) eine Gerade ziehen, welche die Kreise unter einem gegebenen Winkel α schneidet;
g) die vier gemeinschaftlichen Tangenten zeichnen.

56) Man soll zu einem gegebenen Kreis J einen zweiten Kreis so zeichnen, dass die Kreise zwei auf ihrer Centralen gegebene Punkte O und O' zu Aehnlichkeitspunkten haben.

57) Man soll den gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl auffinden
a) für drei in einer Ebene gegebene Kreise A, B, C;
b) für zwei Kreise A, B und eine Gerade MN;
c) für einen Kreis A und zwei Gerade MN und RS;
d) für einen Kreis A und zwei Punkte B und C;
e) für einen Kreis A, eine Gerade MN und einen Punkt B.

58) Es ist ein Kreis J und auf dessen Umfang ein Punkt A gegeben; man soll einen dritten Kreis zeichnen, der den Kreis J in dem Punkt A berührt und zugleich noch
a) einen andern Kreis J' berührt;
b) eine gegebene Gerade MN berührt;
c) durch einen gegebenen Punkt C geht.

59) Es ist eine Gerade MN und auf derselben ein Punkt A gegeben; man soll einen dritten Kreis zeichnen, der die Gerade MN in dem Punkt A berührt und zugleich noch
a) einen gegebenen Kreis J berührt;
b) eine Gerade RS berührt;
c) durch einen gegebenen Punkt C geht.

Die Lage der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise ist in §. 78 angegeben, die Auflösung der Aufgaben 55 beruht so unmittelbar auf dem, was in §. 77 behandelt ist, dass eine Erläuterung überflüssig scheint. In Aufgabe 56 wird der Mittelpunkt J' des gesuchten Kreises, als der vierte harmonische Punkt zu O, O' und J und der Halbmesser des Kreises durch einen Aehnlichkeitsstrahl leicht bestimmt. Die Aufgaben 57 können, wenn die Aehnlichkeitspunkte nach §. 78 bestimmt sind, keinen Anstand haben, da die vier gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahlen in allen Fällen dem Gesetz §. 79 unterworfen sind, obgleich die Zahl dieser

Aehnlichkeitsstrahlen in 57, e auf zwei und in 57, d auf eins reduzirt ist.

Die Eigenschaft §. 80, a des Berührungskreises gibt ein Mittel an die Hand, um alle Aufgaben über den Berührungskreis zu lösen, wenn ein Berührungspunkt gegeben ist. Wenn man auch den Punkt und die gerade Linie in den Begriff des Kreises mit aufnimmt, so können die Aufgaben 58 und 59 in die eine Aufgabe zusammengefasst werden: „Einen Kreis zu zeichnen, der zwei andere Kreise und zwar einen derselben in einem gegebenen Punkt berührt.“ Die allgemeine Auflösung heisst: Man ziehe durch den gegebenen Berührungspunkt einen Aehnlichkeitsstrahl, so bezeichnet derselbe auch auf dem zweiten Kreis den gesuchten Berührungspunkt. Die an die zwei Berührungspunkte gezogenen Halbmesser convergiren im Mittelpunkt des gesuchten Berührungskreises. Diese Auflösung ist auch noch auf 59 b. anwendbar, wenn man erkannt hat, dass der Aehnlichkeitspunkt zweier unendlich grossen Kreise selbst im unendlichen Raume liegt, und dass die Halbirungslinie der Winkel, den die Linien MN und RS mit einander machen, ein Aehnlichkeitsstrahl derselben ist (weil er beide Linien unter gleichen Winkeln schneidet).

XIV. Potenzialität der Kreise.

60) Man soll die Potenzlinie zeichnen zwischen

a) zwei Kreisen J und J';
b) einem Punkt P und einem Kreis J;
c) einem Kreis J und einer Geraden MN;
d) einem Punkt P und einer Geraden MN;
e) zwei Punkten P und 𝔓;
f) zwei Geraden MN und RS.

61) Man soll einen Kreis zeichnen, welcher

a) drei gegebene Kreise A, B, C rechtwinklig schneidet;
b) zwei gegebene Kreise B, C rechtwinklig schneidet, und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden MN liegt;
c) zwei gegebene Kreise A, B rechtwinklig schneidet, und durch einen gegebenen Punkt C geht;
d) einen gegebenen Kreis A rechtwinklig schneidet, durch einen gegebenen Punkt B geht, und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden MN liegt;
e) durch zwei gegebene Punkte A und B geht, und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden RS liegt;
f) durch drei gegebene Punkte A, B und C geht.

62) Es soll ein Kreis gefunden werden, welcher mit einem anderen gegebenen Kreis J eine gegebene Gerade MN zur Potenzlinie hat und ausserdem noch

a) durch einen gegeben Punkt P geht;
b) eine gegebene Gerade RS berührt;
c) einen gegebenen Kreis J' berührt.

63) Man soll zwei Kreise zeichnen, von welchen der eine durch die gegebenen Punkte A und B, der andere durch die gegebenen Punkte C und D geht, und welche eine gegebene Gerade MN zur Potenzlinie haben.

Die Aufgaben 60 sind in §§. 81 u. 83 behandelt (vergl. Fig. 121); die Aufgaben 61 finden durch §. 84 ihre Erledigung, wenn man bemerkt, dass ein Kreis, welcher aus einem Punkt einer Geraden beschrieben ist, zugleich auch ein rechtwinkliger Schnittkreis derselben ist, und dass der Kreis, welcher durch einen Punkt geht, auch als der rechtwinklige Schnittkreis eines auf diesen Punkt reduzirten Kreises betrachtet werden kann, und endlich dass der Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei andere Kreise rechtwinklig schneidet, auf der Potenzlinie dieser Kreise liegt (§. 82 a).

Die Aufgaben 62 können als besondere Fälle einer Aufgabe behandelt werden, wenn man die drei gegebenen Stücke als Kreise betrachtet, und nun zuerst nach 61 einen Hilfskreis i zieht, welcher dieselben rechtwinklig schneidet, dieser Hilfskreis bezeichnet auf dem dritten Kreis, der durch a, b oder c gegeben ist, den Berührungspunkt des gesuchten Kreises, dessen Mittelpunkt überdiess auf der Senkrechten liegt, die man von J aus auf MN fällt, und der somit bestimmt ist.

In Betreff der Aufgabe 63 suche man die Schnittpunkte α und β (Fig. 122) der Geraden AB und CD mit MN, construire aus α mit dem geometrischen Mittel αF zwischen αB und αA, und ebenso aus β mit dem geometrischen Mittel βE zwischen βC und βD Hilfskreise, so wird die Potenzlinie KL dieser zwei Hilfskreise zugleich die auf MN senkrechte Centrale der zwei gesuchten Kreise sein. Die Mittelpunkte J und J' der letzteren werden also durch die senkrechten Halbirungslinien der Strecken AB und CD auf KL bestimmt werden. Man wird nämlich finden, dass die Hilfskreise α und β senkrechte Schnittkreise der Kreise J und J' sind, folglich sind auch die letzteren senkrechte Schnittkreise von α und β und ihre Mittelpunkte liegen also auf der Potenzlinie der Kreise α und β (§. 82 a).

XV. Kreisberührungen.

64) Es sind drei Kreise A, B, C gegeben; man soll einen vierten Kreis zeichnen, welcher

a) die gegebenen Kreise von aussen berührt;
b) dieselben von innen berührt;
c) die Kreise A und B von aussen und den Kreis C von innen berührt;
d) die Kreise A und B von innen und den Kreis C von aussen berührt.

65) Es sind zwei Kreise A und B gegeben; man soll einen dritten Kreis zeichnen, welcher dieselben berührt, zugleich aber auch
a) durch einen gegebenen Punkt C geht;
b) eine gegebene Gerade MN berührt.

66) Es ist ein Kreis A gegeben; man soll einen zweiten Kreis zeichnen, welcher denselben berührt und zugleich
a) zwei gegebene Geraden MN und RS berührt;
b) eine gegebene Gerade MN berührt und durch einen gegebenen Punkt B geht;
c) durch zwei gegebene Punkte B und C geht.

67) Es ist eine Gerade MN gegeben; man soll einen Kreis zeichnen, welcher dieselbe berührt, und zugleich
a) zwei andere gegebene Geraden RS, VW berührt;
b) eine Gerade RS berührt und durch einen Punkt C geht;
c) durch zwei gegebene Punkte B und C geht.

68) Es ist ein Kreis J gegeben; man soll einen andern Kreis zeichnen, welcher denselben berührt und zugleich noch
a) zwei andere Kreise A und B rechtwinklig schneidet;
b) einen andern Kreis A und eine Gerade MN rechtwinklig schneidet;
c) einen andern Kreis A rechtwinklig schneidet und durch einen gegebenen Punkt C geht;
d) eine gegebene Gerade MN rechtwinklig schneidet und durch einen Punkt C geht.

69) Es ist eine Gerade MN gegeben; man soll einen Kreis zeichnen, welcher dieselbe berührt und noch
a) zwei gegebene Kreise B und C rechtwinklig schneidet;
b) einen gegebenen Kreis B und eine gegebene Gerade RS rechtwinklig schneidet;
c) einen gegebenen Kreis B rechtwinklig schneidet und durch einen gegebenen Punkt C geht.

70) Es ist eine Gerade MN gegeben; man soll aus einem Punkt dieser Geraden einen Kreis beschreiben, welcher
a) zwei andere gegebene Kreise A und B berührt;
b) einen gegebenen Kreis B und eine gegebene Gerade RS berührt;
c) einen gegebenen Kreis B berührt und durch einen gegebenen Punkt C geht;

d) eine gegebene Gerade PQ berührt und durch einen gegebenen Punkt C geht.

Es ist nicht das geringste Verdienst der neueren Geometrie, das Chaos der Aufgaben über Kreisberührung gelichtet zu haben. Die Wichtigkeit dieser Aufgaben und weil an ihnen auf eclatante Weise die praktische Seite der neueren Geometrie, nämlich ihre Nützlichkeit, ja Unentbehrlichkeit dargethan werden kann, mag ihnen hier eine ausführlichere Betrachtung gewidmet werden.

Es gibt ihrem Begriff nach zwei Gattungen von Aufgaben über Kreisberührungen, nämlich reine und unreine. Rein heisst eine solche Aufgabe, wenn der gesuchte Kreis blos durch Berührungen bestimmt ist, die er an anderen Kreisen (Linien und Punkten) vornehmen soll; unrein heisst sie dagegen, wenn er auch noch durch anderweitige Beziehungen bestimmt ist. Die reinen Aufgaben über Kreisberührung zerfallen wieder in zwei Abtheilungen, je nachdem ein oder kein Berührungspunkt gegeben ist. Sobald die beiden Berührungspunkte bestimmt sind, kann der Berührungskreis als gefunden betrachtet werden, da die durch die Berührungspunkte gezogenen Normalen (Halbmesser) unmittelbar zum Mittelpunkt des Berührungskreises führen.

Die erste Reihe der reinen Aufgaben über die Kreisberührungen, welche dadurch ausgezeichnet ist, dass ein Berührungspunkt gegeben ist, wird durch die Eigenschaft der perspektivischen Aehnlichkeit der zwei gegebenen Kreise aufgelöst, und ist bereits in 58 und 59 behandelt worden. Obgleich diese Aufgaben von jeher behandelt und leicht gelöst wurden, so ist es doch auch in Betreff ihrer nur der Methode der neueren Geometrie gelungen, ihr Gemeinsames aufzufassen und eine allgemeine Regel zu geben, welche auf alle besonderen Fälle anwendbar ist und zur einfachsten Art der Construction führt.

Die zweite Reihe der reinen Aufgaben über Kreisberührung, welche dadurch ausgezeichnet ist, dass kein Berührungspunkt gegeben ist, wird durch die Eigenschaft der Potenzialität der Kreise aufgelöst. So gross nun auch die Mannigfaltigkeit dieser Aufgaben ist (64—67), nicht nur weil auch hier Punkte und gerade Linien die Stelle von Kreisen einnehmen können, sondern auch weil die Zahl der möglichen Berührungskreise auf acht steigt (§. 85, c), so liefert doch die Eigenschaft der Potenzialität (§. 85) eine allgemeine, auf alle einzelnen Fälle anwendbare Regel der Construction des Berührungskreises. Diese Regel zerfällt in folgende Abtheilungen:

a) Man zeichne denjenigen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl $\alpha\beta$ (Fig. 56), welcher durch die äusseren Aehnlichkeitspunkte derjenigen

Kreispaare geht, die eine gleichartige Berührung erleiden, und durch die inneren Aehnlichkeitspunkte derjenigen Kreispaare, welche ungleichartig berührt werden sollen.

b) Man suche ferner den gemeinschaftlichen Potenzpunkt P der drei gegebenen Kreise mittelst zweier Potenzlinien.

c) Sind diese Vorarbeiten geschehen, so bieten sich drei verschiedene Wege zur Bestimmung des gesuchten Berührungskreises dar.

α) Man bestimme in den gegebenen drei Kreisen A, B, C die Pole A', B', C' des gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahls $\alpha\beta$ und verbinde den Potenzpunkt P mit diesen Polen A', B', C', so werden die Verbindungslinien auf den Kreislinien A, B, C die Berührungspunkte der zwei Berührungskreise liefern, welche zu dem Aehnlichkeitsstrahl $\alpha\beta$ gehören (§. 85, d).

β) Man construire aus P als Mittelpunkt den gemeinschaftlichen rechtwinkligen Schnittkreis P der drei gegebenen Kreise, zeichne sodann denjenigen Kreis α', welcher eben diesen Kreis P, die Sekante MN, welche derselbe mit dem gegebenen Kreis A gemeinschaftlich hat, und den gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl $\alpha\beta$ rechtwinklig schneidet, so bezeichnet dieser Kreis α' auf dem gegebenen Kreis A die Berührungspunkte t, t der zu dem Aehnlichkeitsstrahl $\alpha\beta$ gehörigen Berührungskreise J und J'. Ebenso findet man die Berührungspunkte dieser Berührungskreise auf den anderen Kreisen B und C (§. 85. e).

γ) Man construire einen Kreis, welcher mit dem gemeinschaftlichen Potenzpunkt P den gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahl $\alpha\beta$ zur Potenzlinie hat, und zugleich auch einen der gegebenen Kreise, etwa A, berührt (Aufg. 62), so wird dieser Kreis auch die zwei anderen Kreise B und C berühren.

Obgleich diese Regel auf alle besonderen Fälle (64—67) unbeschränkte Anwendung hat, so sieht man doch, auch in Werken über neuere Geometrie, vergebens ihre Durchführung in den einzelnen Fällen. Aus diesem Grunde, und weil allerdings, wenn man mit der Anschauungsweise der neueren Geometrie nicht vertraut ist, Schwierigkeiten sich darzubieten scheinen, ist es nöthig, noch einige Bemerkungen in dieser Beziehung hinzuzufügen.

Wenn unter den gegebenen Kreisen wenigstens zwei von endlicher Dimension sind, so kann die Anwendung der allgemeinen Regel keine Schwierigkeiten darbieten; diese können sich vielmehr erst da einstellen, wo unter den gegebenen Stücken zwei oder gar drei Kreise von extremer Dimension sich befinden. Recht verstanden verwandelt sich übrigens die Schwierigkeit in eine Vereinfachung und Erleichterung der Construction. Diess wird aus Folgendem erhellen.

Haben zwei Kreise B und C die Gestalt von Punkten (66, c),

so fallen alle vier gemeinschaftlichen Aehnlichkeitsstrahlen in einer und derselben Richtung BC zusammen (§. 78, c), und die senkrechte Halbirungslinie der Strecke BC ist die Potenzlinie zwischen B und C. Man wird also mit Leichtigkeit noch eine zweite Potenzlinie und damit den Potenzpunkt P construiren, und im Uebrigen auf einem der Wege α, β, γ den Berührungskreis bestimmen.

Sind zwei gegebene Kreise unendlich gross, (66, a) und daher ihre Bögen im endlichen Raum durch gerade Linien MN, RS gegeben, so ist der Convergenzpunkt Q dieser Richtungen der gemeinschaftliche Potenzpunkt (§. 83, d), und von den Halbirungslinien der Winkel MQR und NQR ist die eine die Potenzlinie, die andere ein Aehnlichkeitsstrahl zwischen den unendlich grossen Kreisen MN und RS. *) Vier Aehnlichkeitspunkte und daher auch vier Aehnlichkeitsstrahlen können nach 54, c gezeichnet werden, und man wird keine Schwierigkeit haben, den gesuchten Berührungskreis auf einem der Wege α, β, γ zu bestimmen.

Sind eine Gerade MN und zwei Punkte B und C gegeben (67, c), so ist die Richtung BC der einzige gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahl, der existirt. Der Punkt P, in welchem die Gerade MN von der senkrechten Halbirungslinie der Strecke BC getroffen wird, ist der gemeinschaftliche Potenzpunkt P, ein aus P mit PC beschriebener Kreis ist der gemeinschaftliche rechtwinklige Schnittkreis der drei gegebenen Kreise MN, B und C, die Gerade MN ist die Sekante, welche dieser Kreis mit dem unendlich grossen Kreis MN gemeinschaftlich hat. Construirt man also nach der Regel β einen Kreis, welcher die Richtungen MN, BC und den Kreis P rechtwinklig schneidet, so bestimmt er auf MN die Berührungspunkte der zwei zu dem Aehnlichkeitsstrahl BC gehörenden Berührungskreise. Die Regel α ist in diesem Falle nicht anwendbar.

Sind zwei Geraden MN und RS und ein Punkt C gegeben (67, b), so ist der Convergenzpunkt P der Richtungen MN und RS der gemeinschaftliche Potenzpunkt der drei Kreise MN, RS und C. Ein aus P mit PC beschriebener Kreis ist ihr gemeinschaftlicher rechtwinkliger Schnittkreis; die Halbirungslinie VW desjenigen Winkels MPR, in welchem der gegebene Punkt C nicht liegt, ist ein Aehnlichkeitsstrahl zwischen den Kreisen MN und RS, die Gerade C T, welche mit VW parallel gezogen wird, ist also der einzige gemeinschaftliche Aehnlich-

---

*) Ersteres ist in §. 83, e ausgesprochen, letzteres ist in §. 78, wo man es suchen könnte, nicht ausdrücklich bemerkt worden, man wird jedoch leicht auch die Wahrheit der Sache einsehen, wenn man die Eigenschaft der Aehnlichkeitsstrahlen in Erwägung zieht, dass jeder solche Strahl die zwei Kreislinien unter gleichen Winkeln schneidet.

keitsstrahl, der in dem vorliegenden Falle existirt; die Gerade MN ist zugleich auch die Sekante, welche der Kreis P mit dem unendlich grossen Kreis MN gemeinschaftlich hat. Construirt man also nach der Regel β einen Kreis, welcher die Richtungen MN und CT und den Kreis P rechtwinklig schneidet, so bezeichnet er auf MN die Berührungspunkte der zwei zum Aehnlichkeitsstrahl CT gehörigen Berührungskreise. Die Regel α ist in diesem Falle nicht anwendbar.

Sind alle drei Kreise durch Gerade ersetzt, so sind die Halbirungslinien ihrer Winkel die Potenzlinien zwischen den Kreispaaren, ihr Convergenzpunkt P ist der gemeinschaftliche Potenzpunkt, welcher aber in diesem Fall mit dem Mittelpunkt des Berührungskreises selbst zusammen fällt. Man erhält vier Berührungskreise, weil jede zwei gegebene Richtungen zwei Winkel mit einander machen, und daher zu zwei Halbirungslinien führen, deren jede als Potenzlinie betrachtet werden kann.

Sind alle drei Kreise durch Punkte A, B, C ersetzt, so sind die senkrechten Halbirungslinien der zwischen ihnen liegenden Strecken die drei Potenzlinien, die im gemeinschaftlichen Potenzpunkt P convergiren, der aus P mit PA beschriebene Kreis ist der gemeinschaftliche Potenzkreis, welcher aber mit dem gesuchten Berührungskreis zusammen fällt.

Die unreinen Aufgaben über Kreisberührung 68 und 69 werden folgendermaassen auf die reinen zurückgeführt. Man zeichnet einen Hilfskreis i, welcher die Kreise A und B rechtwinklig schneidet, und construirt sodann einen Kreis, welcher mit dem Hilfskreis i die Centrale AB zur Potenzlinie hat, zugleich aber den gegebenen Kreis J berührt (62), so wird derselbe die Kreise A und B rechtwinklig schneiden und also der Aufgabe genügen. Diese Regel der Construction ist in allen Fällen anwendbar, wenn auch Punkte und gerade Linien die Stelle von Kreisen einnehmen.

Die unreinen Aufgaben über Kreisberührung 70 können ebenfalls auf die reinen zurückgeführt werden. Zeichnet man nämlich in 70, a statt der gegebenen MN einen Hilfskreis C (Fig. 123), der dem gegebenen Kreis B gleich ist und so liegt, dass die Entfernung BC der Mittelpunkte von MN senkrecht halbirt wird, so wird ein Kreis, der die Kreise B, C und A berührt, mit seinem Mittelpunkt auf MN liegen, und also der Aufgabe genügen. In 70, b wird man für MN eine Richtung VW setzen, die so liegt, dass der Winkel zwischen RS und VW durch MN halbirt wird, in 70, d und c wird man statt MN einen Punkt D von solcher Lage wählen, dass CD durch MN senkrecht halbirt wird, und aber im Uebrigen ähnlich wie in 70, a verfahren. Eine direkte Auflösung dieser Aufgaben enthalten übrigens auch die Figuren 61, a, b und c, in welchen ein aus C mit CC', sowie ein aus 𝕮 mit 𝕮𝕮' beschriebener Kreis die zwei gegebenen Kreise F' und F'' berührt.

XVI. Polarität der Kegelschnitte.

71) Es ist die Curve eines Kegelschnitts gegeben; man soll

a) zu einem Punkt O, der nicht auf der Curve liegt, die Polare suchen;

b) zu einer Richtung $\alpha\alpha'$, die den Kegelschnitt nicht berührt, den Pol bestimmen;

c) zu einem Punkt C der Curve die Polare suchen;

d) auf einer Tangente $\gamma\gamma'$ ihren Berührungspunkt bestimmen;

e) zu einem Punkt A der Richtung $\alpha\alpha'$ den conjugirten Punkt finden;

f) zu einem Strahl Aα des Vielstrahls A den conjugirten Strahl zeichnen.

72) Man soll den Durchmesser einer gegebenen Kegelschnittcurve zeichnen, welcher

a) einer gegebenen Richtung MN conjugirt ist;

b) mit einer gegebenen Richtung MN parallel ist;

c) durch einen gegebenen Punkt O, der nicht auf der Curve liegt, geht;

d) durch einen gegebenen Punkt C der Curve geht.

73) Man soll eine Tangente an die gegebene Curve eines Kegelschnitts ziehen, welche

a) durch einen Punkt O geht, der nicht auf der Curve liegt;

b) durch einen Punkt C der Curve geht;

c) mit einer gegebenen Richtung MN parallel ist;

d) einer gegebenen Richtung MN conjugirt ist.

74) In einem Kegelschnitt, dessen Curve gegeben ist, soll man

a) den Mittelpunkt bestimmen;

b) die Axen construiren;

c) die Brennpunkte finden;

d) die Direktrizen zeichnen.

Die Aufgaben 71, a, b über den Kegelschnitt werden wie die Aufgaben 50, a, b über den Kreis behandelt; die Aufgaben 71, e, f wie 51, a, b. Um die Polare eines Punktes C der Curve zu construiren, muss man den Pol γ einer Sekante C𝔊 des Kegelschnitts mit C verbinden; und um den Berührungspunkt einer Tangente $\gamma\gamma'$ zu finden, muss man die Polare C𝔊 zu irgend einem Punkt γ derselben zeichnen, so wird sie den Berührungspunkt C auf $\gamma\gamma'$ bestimmen.

Der Durchmesser eines Kegelschnitts, welcher einer gegebenen Rich-

tung MN conjugirt ist, halbirt zwei mit MN parallel gezogene Sehnen, und durch die Mitte dieses Durchmessers geht der andere mit MN parallele Durchmesser.

Halbirt man die zwei Sehnen, welche mit der Polare eines Punktes O parallel gehen durch eine Gerade, so ist sie der Durchmesser, welcher durch O geht, und diess ist sie auch dann noch, wenn O auf der Curve selbst liegt.

Die Polare eines gegebenen Punktes O bezeichnet auf der Curve auch die Berührungspunkte der von O aus an die Curve gezogenen Tangenten, und wenn der Punkt C auf der Curve selbst liegt, so ist die Polare dieses Punktes, welche nach 71, c gezeichnet wird, die gesuchte Tangente. Wenn eine Richtung MN gegeben ist, so bestimmt der Durchmesser, welcher der Richtung MN conjugirt ist, die Berührungspunkte der mit MN parallelen Tangenten, und der mit MN parallele Durchmesser bezeichnet die Berührungspunkte der Tangenten, welche der Richtung MN conjugirt sind.

Der Mittelpunkt des Kegelschnitts wird durch zwei Durchmesser, die Axen werden durch einen Hilfskreis bestimmt, welcher aus dem Mittelpunkt O des Kegelschnitts beschrieben wird, und die Curve desselben in vier Punkten C,ℭ,D,𝔇 schneidet; die Halbirungslinien von < COD und < CO𝔇 geben nämlich die Richtungen der zwei Axen. Die Brennpunkte werden durch einen Kreis gefunden, den man über der Hauptaxe A𝔄 als Durchmesser construirt. Wenn man nämlich in diesen Kreis einen rechten Winkel als Peripheriewinkel so zeichnet, dass der Kegelschnitt von einem Schenkel desselben berührt wird, so geht der andere Schenkel durch den Brennpunkt §. 131. Die Polaren der Brennpunkte sind die Direktrizen des Kegelschnitts.

XVII. Construction der Kegelschnitte.

Die bedeutendste Frucht der neueren Geometrie ist das Licht, welches sie in die Lehre von den Kegelschnitten gebracht hat. Diess beurkundet sich von seiner praktischen Seite in der Behandlung der Aufgaben über diesen Gegenstand. Um diess zu zeigen, mag daher hier der Versuch gemacht werden, die Aufgaben über die Construction der Kegelschnitte auf eine möglichst vollständige und erschöpfende Weise zu behandeln. *)

*) Die grosse Zahl dieser Aufgaben ergibt sich, wenn man bemerkt, dass die 14 Partialaufgaben zu jeder der Hauptaufgaben gehören, deren im Folgenden 62 allgemeine, 3 über die Ellipse, 16 über die Hyperbel, 15 über die Parabel, also im Ganzen 96 angeführt sind. Die Zahl der Partialaufgaben ist also 14 . 96 = 1344.

Zur besseren Uebersicht schien es zweckdienlich, diese Aufgaben in vier Abschnitte abzutheilen, je nachdem unter den gegebenen Stücken: Elemente des Brennpunktes, des Centrums, eines andern Punktes in der Ebene des Kegelschnitts, oder lauter Elemente des Umfanges sich befinden. Es schliesst übrigens die Aufgabe „einen Kegelschnitt zu construiren, wenn derselbe durch die erforderliche Zahl von Bestimmungsstücken gegeben ist," eine Reihe von Partialaufgaben ein, welche hier ein für alle Mal aufgeführt werden sollen, nämlich:

1*) Die Punkte des Kegelschnitts zu bestimmen, welche auf einer gegebenen Richtung liegen:

a) auf der Richtung eines Brennstrahls;
b) auf der Richtung eines Durchmessers;
c) auf der Richtung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt C des Umfanges geht;
d) auf einer ganz beliebigen Richtung MN in der Ebene des Kegelschnitts, welche durch keinen gegebenen oder bekannten Punkt geht.

2*) Die Tangenten des Kegelschnitts zu bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen:

a) durch einen Punkt C des Umfanges;
b) durch einen Punkt P ausserhalb des Kegelschnitts im endlichen Raum;
c) durch einen Punkt im unendlichen Raum. Dieser Punkt des unendlichen Raumes ist durch eine Richtung MN gegeben, und die Aufgabe wird daher gewöhnlich so gefasst, dass man sagt: eine Tangente zu construiren, welche mit einer gegebenen Richtung MN parallel sei.

3*) Zu einem gegebenen Punkt P seine Polare, und zu einer gegebenen Richtung $\alpha\beta$ ihren Pol zu finden; und was hiermit zusammenhängt, auf einer gegebenen Richtung $\alpha\beta$ zu einem gegebenen Punkt P den conjugirten Punkt, und durch einen gegebenen Punkt O eine Richtung zu ziehen, die einer andern gegebenen Richtung $\alpha\beta$ conjugirt sei.

4*) Einen Durchmesser des Kegelschnitts zu zeichnen, welcher

a) durch einen gegebenen Punkt P gehe;
b) mit einer gegebenen Richtung MN parallel laufe;
c) einer gegebenen Richtung conjugirt sei.

5*) Den Mittelpunkt des Kegelschnitts zu bestimmen.

6*) Die Axen des Kegelschnitts zu construiren.

7*) Die Brennpunkte und Direktrizen des Kegelschnitts zu suchen.

A. Focalconstruktion der Kegelschnitte.

75) Gegeben: die zwei Brennpunkte F' und F'' und
a) die Länge a der Hauptaxe;
b) die Direktrize $\alpha\gamma$;
c) ein Punkt C auf der Curve, vorausgesetzt, dass bekannt ist, zu welcher Art der Kegelschnitt gehöre;
d) eine Tangente MN.

Man wird leicht die Scheitel A und 𝔄 der Axe, zwei Leitkreise mit ihrer Potenzlinie und ihrem zugehörigen Aehnlichkeitspunkt O' construiren, und damit hat man Alles, um die im VI. Buch ausführlich behandelten Construktionsmethoden anwenden zu können, so dass nur noch zu zeigen übrig bleibt, wie die Partialaufgaben 1* — 7* sich gestalten.

Will man die Collineation des Kegelschnitts mit seinem Leitkreis nicht benützen, so wird man die Punkte der Curve bestimmen, welche auf einer beliebigen Richtung MN liegen, indem man nach Aufg. 70 die Erzeugungskreise, d. h. die Berührungskreise der Leitkreise F' und F'' aufsucht, deren Mittelpunkte auf der Richtung MN liegen. — Man wird die Tangenten construiren, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, indem man über PF'' und A𝔄 als Durchmesser zwei Kreise beschreibt, die sich in D und 𝔇 schneiden und PD und P𝔇 zieht (vgl. §. 98). Wenn der Punkt P unendlich weit entfernt ist und die Tangente mit MN parallel gehen soll, so wird man doch noch dieselbe Regel in Anwendung bringen können, wenn man bemerkt, dass der unendlich grosse Kreis über PF'' durch die Gerade dargestellt wird, welche durch F'' geht und auf MN senkrecht steht, und dass also durch die Schnittpunkte D und 𝔇 dieser Geraden mit dem Kreis A𝔄 Parallellinien mit MN zu ziehen sind. Die Tangente, welche durch einen Punkt C des Umfanges geht, ist eine der Halbirungslinien des Winkels der Strahlen F'C und F''C. Pol und Polaren können nach der Regel der Aufg. 71 bestimmt werden, weil nach Obigem auf jeder beliebigen Richtung die Punkte der Curve gefunden werden können. Die Partialaufgaben 5* — 7* bedürfen keiner Erläuterung.

Eine zweite Methode, die Partialaufgaben zu lösen, bietet die Collineation des Kegelschnitts mit dem Leitkreis, und leistet namentlich für die Partialaufgaben 1* entschiedene Vortheile (§. 93). Die Collineationsmethode ist aber auch auf die übrigen Partialaufgaben anwendbar. Soll z. B. zu einer gegebenen Richtung MN der Pol im Kegelschnitt aufgesucht werden, so suche man zu der Richtung MN nach Aufg. 33, b oder 34, c die homologe Richtung M'N' im System des Leitkreises, bestimme sodann in diesem Kreis den Pol O' von M'N' und suche jetzt wieder den homologen

Punkt O im Kegelschnitt auf, so ist O der gesuchte Pol der Richtung MN im Kegelschnitt (§. 120). Auf dieselbe Weise werden alle andere Partialaufgaben behandelt.

76) Gegeben: ein Brennpunkt F'', die zugehörige Direktrize $\alpha\gamma$ und

a) die Länge a der Hauptaxe;

b) die zweite Direktrize $\alpha'\gamma'$;

c) ein Punkt C der Curve;

d) eine Tangente MN.

Man wird, gestützt auf §. 99, diese Aufgaben leicht auf 75 zurückführen.

77) Gegeben: ein Brennpunkt F'', die Richtung A𝔄 der Axe, und

a) zwei Punkte C und D der Curve;

b) ein Punkt C der Curve und eine Tangente RS;

c) zwei Tangenten MN und RS.

Beschreibt man in 77, a aus C und D zwei Kreise, welche durch F'' gehen, und zieht durch ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt die Senkrechte $\alpha\beta$ auf die Axenrichtung A𝔄, so ist die Aufgabe auf 76 zurückgeführt, indem der Kegelschnitt, welcher zu dem Brennpunkt F'' und der Richtungen $\alpha\beta$ als der zugehörigen Direktrize construirt wird, der Aufgabe genügt (§. 87). Man könnte auch sogleich den anderen Brennpunkt F'' finden, denn dieser ist der Mittelpunkt eines Kreises, der aus einem Punkt der Richtung A𝔄 beschrieben wird und die Kreise C und D gleichartig berührt (Aufg. 70, a). Auf ähnliche Art werden auch die zwei folgenden Aufgaben b und c behandelt. Nimmt man nämlich den Punkt D' so dass F''D' durch RS senkrecht halbirt wird, so liefert ein Kreis, welcher durch D' geht, den Kreis CF'' berührt und dessen Mittelpunkt auf der Richtung A𝔄 liegt, den andern Brennpunkt F'' des Kegelschnitts. Sind endlich zwei Tangenten MN und RS gegeben, so werden C' und D' auf gleiche Weise wie der Punkt D' in der vorausgehenden Aufgabe bestimmt, und die senkrechte Halbirungslinie der Strecke C'D' bestimmt auf der Richtung A𝔄 den Brennpunkt F''.

78) Gegeben: ein Brennpunkt F'' und

a) drei Punkte C, D, E der Curve;

b) zwei Punkte C, D und eine Tangente VW;

c) ein Punkt C und zwei Tangenten RS, VW;

d) drei Tangenten MN, RS und VW.

Diese Aufgaben werden ähnlich wie diejenigen von 77 auf 76 reduzirt. Die äussere Aehnlichkeitsaxe der drei aus C, D und E beschriebenen und durch den Punkt F'' gehenden Kreise hat die Eigenschaft, dass sie als Direktrize mit dem Brennpunkt F'' einen Kegelschnitt bestimmt, welcher der Aufgabe genügt. Auch liefert der gleichartige Berührungskreis der Kreise C, D, E den andern Brennpunkt F' des Kegelschnittes. Die

Tangenten der folgenden drei Aufgaben werden wie in der Aufgabe 77 zur Bestimmung der Punkte C′, D′ und E′, durch welche der Leitkreis F′ geht, benützt.

79) Gegeben: die Direktrize $\alpha\gamma$ und

a) die Punkte C, D, E der Curve;

b) zwei Punkte C, D der Curve und die Richtung A𝔄 der Hauptaxe.

Sucht man nach Aufg. 27 denjenigen Punkt F″, welcher gegen die Punkte C, D, E eine solche Lage hat, dass seine Entfernungen von diesen Punkten sich zu einander verhalten, wie die Entfernungen der Punkte C, D, E von der Direktrize $\alpha\gamma$, so ist diess der zu $\alpha\gamma$ gehörige Brennpunkt des Kegelschnitts (§. 99, a). Wenn die Axenrichtung A𝔄 gegeben ist, so vereinfacht sich die Aufgabe. Sucht man nämlich zu dem Schnittpunkt δ der Richtungen CD und $\alpha\gamma$ den andern Punkt d der harmonischen Trennung der Punkte C und D, so bezeichnet der über d δ als Durchmesser construirte Kreis auf A𝔄 den Brennpunkt F″ des Kegelschnitts. In beiden Fällen sind also die Aufgaben auf 75 reduzirt.

B. Centralconstruktion der Kegelschnitte.

80) Gegeben: die Richtungen zweier Paare conjugirter Durchmesser CD, ℭ𝔇; EF, 𝔈𝔉 und

a) ein Punkt G der Curve;

b) eine Tangente MN des Kegelschnitts.

Weil die conjugirten Durchmesser eine Involution bilden, so kann nach Aufg. 20 zu jeder Richtung GH, eines weiteren Durchmessers, und überhaupt zu jeder Richtung MN, wenn GH || MN gezogen wird, die Richtung des conjugirten Durchmessers gefunden werden. Auch liefern die Normalstrahlen des involutorischen Vielstrahls des Mittelpunkts O die zwei Axenrichtungen AB und 𝔄𝔅. Auch kann vermöge dieses Involutionsgesetzes die zweite Aufgabe 80, b auf 80, a zurückgeführt werden, da der Durchmesser, welcher der Richtung MN conjugirt ist, auf derselben den Berührungspunkt bestimmt.

Auf jeder durch den gegebenen Punkt G gehenden Richtung kann man den andern Schnittpunkt H mit der Curve leicht bestimmen, wenn man die Richtung des zu GH conjugirten Durchmessers 𝔊𝔋 sucht und den Punkt H gerade so wählt, dass die Strecke GH durch 𝔊𝔋 halbirt wird. Auch auf der Richtung eines beliebigen Durchmesser CD können die Scheitelpunkte gefunden werden. Sind nämlich CD und ℭ𝔇, GH und 𝔊𝔋 zwei Paare conjugirter Durchmesser, und zieht man von dem gegebenen Punkt G aus GJ || ℭ𝔇, GL || 𝔊𝔋, so ist GJ eine dem Durchmesser CD conjugirte Sehne, und GL eine dem Durchmesser GH conjugirte Richtung, welche den Kegelschnitt in G berührt. Der Punkt L auf CD

ist also der Pol der Richtung GJ (§. 107, a). Das geometrische Mittel zwischen OL und OJ gibt also die Länge des halben Durchmessers der Richtung CD (§. 112, b). Auf diese Weise bestimmt man auch die Scheitelpunkte A, B, 𝔄, 𝔅 der Axen.

Soll man zu einem Punkt O die Polare des Kegelschnitts construiren, so wird man von O aus durch zwei schon bekannte Punkte G und J zwei Richtungen ziehen, ihre Schnittpunkte H und K auf der Curve nach obiger Regel bestimmen und im Uebrigen wie in Aufg. 71, a verfahren. Kann man aber die Polare eines Punktes finden, so lehrt 71, b wie der Pol zu einer gegebenen Richtung MN bestimmt wird. Und nun ist man auch im Stande, auf jeder beliebigen Richtung MN zwei Paare conjugirter Punkte aufzusuchen, und die Hauptpunkte der durch sie bestimmten Involution liefern ihre Schnittpunkte mit der Curve. Ebenso kann man, wenn ein Punkt O gegeben ist, zwei Paare der in ihm conjugirten Richtungen finden und die Hauptstrahlen der durch sie bestimmten Involution liefern die von O aus an die Curve gezogenen Tangenten. Die Brennpunkte des Kegelschnitts können nach der Aufg. 74, c bestimmt werden.

81) Gegeben: die Richtungen eines Paares conjugirter Durchmesser CD, ℭ𝔇 und

a) zwei Punkte E, F der Curve;
b) die Länge des Durchmessers CD und ein Punkt E der Curve;
c) die Längen CD und ℭ𝔇 der beiden Durchmesser;
d) zwei Tangenten MN und RS;
e) die Länge des Durchmessers CD und eine Tangente MN;
f) ein Punkt E der Curve und eine Tangente RS.

Alle diese Aufgaben können auf diejenigen von 80 zurückgeführt werden. Zieht man nämlich in 81 a, zwei Durchmesser ef und 𝔢𝔣, wovon der eine mit EF parallel ist, und der andere die Strecke EF halbirt, so hat man ein weiteres Paar conjugirter Durchmesser. Ebenso werden auch die Aufgaben 81, b und c behandelt. Sind aber zwei Tangenten MN und RS gegeben, welche in einem Punkt P convergiren, so zieht man durch P die Richtung des Durchmessers PQ, und bestimmt die Richtung P𝔔 so, dass die Richtungen MN und RS durch PQ und P𝔔 harmonisch getrennt werden, alsdann sind auch PQ und P𝔔 conjugirte Richtungen, wenn man also durch den Mittelpunkt O die Gerade pq ∥ P𝔔 zieht, so sind auch PQ und pq die Richtungen eines zweiten Paares conjugirter Durchmesser. Die Aufgabe 81, e kann auf 81, a zurückgeführt werden. Sucht man nämlich zum Schnittpunkt T der Richtungen CD und MN denjenigen Punkt S, welcher mit T die gegebenen Punkte C und D harmonisch trennt, und zieht sodann SE ∥ ℭ𝔇, so wird dadurch auf der Tangente MN ein zweiter Punkt E der Curve bestimmt. In der Aufgabe 81, f endlich wird man leicht zum gegebenen

Punkt E noch drei andere Punkte bestimmen; einer derselben, F, steht ihm diametral gegenüber, zwei andere, G und H, liegen so, dass die Strecken EG und EH durch die gegebenen Richtungen CD und ℭ𝔇 der conjugirten Durchmesser halbirt werden. Es sind somit vier Punkte E, F, G, H der Curve und die Richtung einer Tangente RS bekannt. Jeder der Hauptpunkte der Involution, welche durch die Seiten des Vierecks EFGH auf RS bestimmt wird, ist ein fünfter Punkt der Curve §. 114, c. Diese Aufgabe lässt also zwei Auflösungen zu.

82) Gegeben: die Axe AB der Richtung und Grösse nach und

a) ein Punkt C der Curve;

b) eine Tangente MN;

c) die Grösse der zweiten Axe.

Weil die zweite Axe 𝔄𝔅 der ersten conjugirt ist und auf ihr senkrecht steht, so sind diese Aufgaben auf 81 zurückzuführen.

83) Gegeben: der Mittelpunkt O und

a) drei Punkte C, D, E der Curve;

b) zwei Punkte C, D und eine Tangente VW;

c) ein Punkt C und zwei Tangenten RS, VW;

d) drei Tangenten MN, RS, VW.

Die Aufgabe a wird auf 80, a zurückgeführt, indem man zu zwei Strecken CD und DE wie in 81, a je den parallelen und conjugirten Durchmesser cd, 𝔠𝔡; de, 𝔡𝔢 construirt; die Aufgabe b wird auf 81 f zurückgeführt, wenn man zur Strecke CD, den parallelen und conjugirten Durchmesser sucht; die Aufgabe c ebenfalls auf 81, f, wenn man an den Convergenzpunkt P der gegebenen Tangente die Richtung OP eines Durchmesser zieht, zu PR, PO und PV den vierten harmonischen Strahl P𝔇 sucht und Op ∥ P𝔇 zieht, indem jetzt OP und Op zwei conjugirte Durchmesser sind; endlich die Aufgabe d auf 80, b, wenn man auf die ebenbezeichnete Weise zwei Paare conjugirter Durchmesser sucht.

84) Gegeben: ein Durchmesser CD der Richtung und Grösse nach und

a) zwei Punkte E und F der Curve;

b) zwei Tangenten MN und RS;

c) ein Punkt E der Curve und eine Tangente RS.

Man wird leicht sehen, dass diese Aufgaben wesentlich identisch sind mit 83, a, b, c.

C. Polarconstruction der Kegelschnitte.

Die Centralconstruktion der Kegelschnitte ist ein besonderer Fall einer anderen allgemeinen Construktion, welche ihr wesentliches Merkmal

darin hat, dass unter den gegebenen Bestimmungsstücken solche Elemente des Kegelschnitts sich befinden, die nicht der Curve angehören, die aber nichtsdestoweniger zur Bestimmung des Kegelschnitts dienen können. Diese Eigenschaft kommt ihnen zu, wenn es homologe Elemente der Polarität des Kegelschnitts sind. Ist der Mittelpunkt des Kegelschnitts gegeben, so ist derselbe nicht, wie es scheinen könnte, ein einfaches Element, denn der Mittelpunkt ist der Pol einer unendlich entfernten Geraden, welche stets als bekannt betrachtet werden muss; durch den Mittelpunkt ist also in der That ein Pol mit seiner Polaren gegeben. Ist ausserdem noch ein Paar conjugirter Durchmesser gegeben, so bilden sie mit der Geraden des unendlichen Raumes ein Polardreieck, welches somit als gegeben zu betrachten ist. Durch zwei Paare in einem Punkt conjugirter Richtungen sind eigentlich zwei Tangenten des Kegelschnitts gegeben. Die folgende Polarconstruktion des Kegelschnitts wirft also nicht bloss das wahre Licht auf die Centralconstruktion, sondern sie liefert auch die wahren Aufgaben über die Polarität der Kegelschnitte, denn diejenigen Aufgaben, welche in der XVI. Abtheilung aufgeführt sind, sind insofern uneigentliche zu nennen, weil dort die ganze Curve, also unendlich viele und darum überflüssige Bestimmungsstücke gegeben sind. Die folgenden Aufgaben sind daher für das Studium der Kegelschnitte von grosser Wichtigkeit und müssen besonders demjenigen empfohlen werden, der eine tiefere Einsicht wünscht.

85) Gegeben: ein Polardreieck $QQ'Q''$ und

a) auf der Richtung einer seiner Seiten zwei conjugirte Punkte γ und γ' und ein Punkt C der Curve;

b) auf der Richtung einer seiner Seiten zwei conjugirte Punkte γ und γ' und eine Tangente MN;

c) zwei Punkte C und D des Umfanges;

d) ein Punkt C und eine Tangente RS;

e) zwei Tangenten MN und RS.

Die Aufgaben a und b sind wesentlich mit c und e identisch; denn die Punkte γ und γ' bilden mit den Punkten Q und Q', mit welchen sie in einer Richtung liegen, zwei Paare conjugirter Punkte, welche die Hauptpunkte der Involution der conjugirten Punkte dieser Richtung, und also die Punkte, in welchen diese Richtung die Curve schneidet, bestimmen, so wie andererseits die Hauptstrahlen der Involution Q'', $QQ'\gamma\gamma'$ die in dem Punkt Q'' convergirenden Tangenten bestimmen. Die Aufgaben a und b haben nur dadurch einen allgemeineren Charakter als c und e, dass die Punkte der Curve und die Tangenten, welche sie implicite in sich schliessen, auch imaginär sein können. Ist nun noch ein Punkt C der Curve gegeben, so kann sogleich ein in den Kegelschnitt inbeschriebenes Viereck CDEF, zu

welchem das Polardreieck gehört, gezeichnet werden, wenn man sich erinnert, dass im Polardreieck jedes Eck der Pol seiner Gegenseite ist und die Eigenschaft, wonach zwei homologe Punkte der Curve durch den Pol und die Polare harmonisch getrennt werden, (§. 106) in Anwendung bringt. Aber auch jeder andere Punkt, der auf einer durch C gehenden Richung liegt, kann nach eben dieser Regel gefunden werden, wenn man nur zu dem Punkt α, in welchem sie die Seite QQ' schneidet, den conjugirten Punkt α' der bekannten Involution der Richtung QQ' sucht und dadurch ein zweites Polardreieck $Q''\alpha\alpha'$ zeichnet. Hiermit ist aber die Aufgabe 85, a gewissermassen auf 71 zurückgeführt. Soll z. B. zu irgend einem gegebenen Punkt P seine Polare $\beta\beta'$ bestimmt werden, so darf man nur nach den bekannten Punkten C, E der Richtung gleichen Namens von P aus zwei Richtungen ziehen und auf ihnen die Punkte G und H der Curve suchen, so liefern die Convergenzpunkte P, P' und P'' der Gegenseiten des vollständigen inbeschriebenen Vierecks CGEH ein weiteres Polardreieck, in welchem P'P'' die Polare des Punktes P ist.

Soll zu einer gegebenen Richtung MN der Pol gefunden werden, so weiss man, dass derselbe durch die Polaren zweier ihrer Punkte β, γ bestimmt ist; diese Polaren bestimmen zugleich auf MN zwei andere Punkte β', γ', welche den ersteren conjugirt sind, und die Hauptpunkte dieser Involution liefern die zwei Punkte, in welchen die Richtung MN die Curve schneiden wird, wenn diess überhaupt der Fall ist. Ebenso liefern die Hauptstrahlen der Involution zweier in einem Punkt P convergirender und conjugirter Strahlen die zwei in P convergirenden Tangenten des Kegelschnitts. Es bleibt noch übrig, den Mittelpunkt, die Axe und die Brennpunkte zu bestimmen. Der Durchmesser KL, welcher der Seite QQ' conjugirt ist, geht aber durch Q'' und den Centralpunkt L der Involution $QQ'\gamma\gamma'$ und kann somit sogleich gezeichnet werden. Die Endpunkte der Durchmesser können nach der oben angegebenen Regel aber noch einfacher dadurch bestimmt werden, dass man die Punkte S, S', T, T' bemerkt, in welchen die Richtung des Durchmessers von den Polaren (Tangenten) der bekannten Endpunkte C und E der Sehne, und von den Richtungen der dem Durchmesser KL conjugirten und ebenfalls durch C und E gehenden Sehnen geschnitten werden; die Hauptpunkte K, L der Involution S S' T T' sind die Endpunkte des gesuchten Durchmessers. Die Mitte O des Durchmessers KL ist der Mittelpunkt, der Durchmesser $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$, welcher mit $\gamma\gamma'$ parallel geht, ist dem ersteren KL conjugirt, und nun können nach Aufgabe 81 die Axen, Brennpunkte etc. bestimmt werden.

Die Aufgabe 85, b wird auf 85, a zurückgeführt, indem man durch

den Convergenzpunkt N der gegebenen Tangente MN mit QQ' und in dem involutorischen Vielstrahl Q'',QQ'$\gamma\gamma'$ zu Q''N den zugeordneten Strahl Q''M sucht. Der Strahl Q''M bestimmt auf MN den Berührungspunkt M.

Die Aufgabe 85, c wird auf 85, a dadurch zurückgeführt, dass man die Richtungen CQ und DQ zieht, und auf diesen Richtungen vermöge der harmonischen Theilung, welche die Sehnen dieser Richtungen, durch den Pol Q und die Polare Q'Q'' erfahren, die weiteren Punkte E und F der Curve sucht. Die Convergenzpunkte α,α' der Gegenseiten des Vierecks CDEF werden auf Q'Q'' liegen, und die Punkte α, α', Q', Q'' werden die Involution der auf Q'Q'' liegenden conjugirten Punkte bestimmen. Die Aufgabe 85, d wird auf 85, a dadurch zurückgeführt, dass man zu dem gegebenen Punkt C vermittelst des Polardreiecks QQ'Q'' noch drei andere Punkte D,E,F auf der Curve bestimmt, und auf der Tangente nun auch vermittelst der Hauptpunkte der Involution, welche durch die Seitenrichtungen des Vierecks CDEF auf ihr bestimmt wird, den Berührungspunkt sucht. Weil zwei Hauptpunkte existiren, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen.

In Aufg. e bestimmt man die Convergenzpunkte m und r der gegebenen Tangenten mit der Richtung Q'Q'', sucht den Strahl m𝔐, welcher mit mM die Strahlen mQ und mQ'' harmonisch trennt, und ebenso bestimmt man auch den Strahl rℜ, der mit rR die Richtungen rQ und rQ'' harmonisch trennt, alsdann sind m𝔐 und rℜ zwei weitere Tangenten des Kegelschnittes, welche ein umbeschriebenes Vierseit GHIK bestimmen, dessen Diagonalen ebenfalls ein Polardreieck Q$\alpha\alpha'$ liefern, das mit einem Eck in Q und mit einer Seitenrichtung $\alpha\alpha'$ auf Q'Q'' liegt und auf derselben die Involution $\alpha\alpha'$ Q'Q'' bestimmt. Hiermit ist die vorliegende Aufgabe auf 85, b zurückgeführt.

86) Gegeben: ein Punkt Q, die Richtung Q'Q'' seiner Polare und

a) drei Punkte A, B, C der Curve;

b) zwei Punkte A, B der Curve und eine Tangente VW;

c) ein Punkt A der Curve und zwei Tangenten RS, VW;

d) drei Tangenten MN, RS, VW.

Zieht man in 86, a die Richtungen AQ und BQ, bemerkt ihre Schnittpunkte α und β mit der Richtung Q'Q'', sucht zu A und B die zugeordneten harmonischen Punkte A', B', so convergiren die Gegenseiten des Vierecks AB'C'B in zwei Punkten Q' und Q'' der gegebenen Richtung Q'Q'', und bestimmen ein Polardreieck QQ'Q'' des Kegelschnitts, in welchem ausserdem noch zwei Punkte A und C bekannt sind; die Aufgabe ist somit auf 85, c reduzirt. Ganz auf diese Weise wird 86, b auf 85, d zurückgeführt. Sind aber zwei Tangenten RS und VW gegeben, so wird man ebenfalls die Punkte ϱ und τ, in welchen sie die gegebene Richtung Q'Q'' schneiden, bemerken, und in dem Vielstrahl ϱ den Strahl ϱR' suchen, welcher mit ϱR die Strahlen ϱQ und ϱQ' harmonisch trennt, und ebenso auch den Strahl τV' bestimmen, und dadurch ein umbeschriebenes Viereck er-

halten, dessen Diagonalen das Polardreieck QQ′Q″ liefern. Auf solche Weise werden die Aufgaben 86, c und d auf 85, d und e zurückgeführt.

87) Gegeben zwei Punkte P, Q und ihre Polaren P′P″ und Q′Q″ und

a) ein Punkt C der Curve;

b) eine Tangente MN.

Der Convergenzpunkt R der gegebenen Richtungen P′P″ und Q′Q″ ist die Polare der Richtung PQ, man wird also, wie diess in der vorausgehenden Aufgabe geschehen ist, vermöge des Punktes R und seiner Polare PQ zu C noch einen Punkt D, und vermöge des Punktes Q und seiner Polare Q′Q″ zu C noch einen Punkt E auf der Curve bestimmen, damit hat man ausser dem Pole P und seiner Polaren P′P″ noch drei Punkte C, D, E auf der Curve, und die Aufgabe ist auf 86, a zurückgeführt. Aehnlich wird man auch 87, d auf 86, d zurückführen.

D. Peripherische Construction der Kegelschnitte.

88) Gegeben: fünf Punkte A, B, C, D, E der Curve.

89) Gegeben: fünf Tangenten a, b, c, d, e.

Die Aufgabe 88 kann sogleich auf die Polarconstruction 85, c zurückgeführt werden, indem man zu dem gegebenen inbeschriebenen Viereck ABCD das Polardreieck QQ′Q″ zeichnet, in dessen Ecken die Gegenseiten des Vierecks convergiren, und neben diesem Polardreieck die Punkte A und E als die gegebenen Stücke betrachtet. Es gestattet übrigens die Aufgabe eine sehr einfache, direkte Auflösung. Es bestimmen nämlich die Dreistrahlen A, CDE und B, CDE zwei conforme Vielstrahlen, deren homologe Strahlenpaare den gesuchten Kegelschnitt erzeugen (§. 103, a). Man kann also nach Aufgabe 13 auf jeder, durch A, B oder durch irgend einen der fünf gegebenen Punkte gehenden Richtung einen weiteren Punkt des Kegelschnitts, ja vermöge Aufgabe 30 die Punkte der Curve finden, welche auf einer beliebigen Richtung MN liegen. Man kann auch vermöge 13, b eine Tangente durch einen der gegebenen Punkte etwa durch A ziehen, weil derjenige Strahl des Vielstrahls A, welcher dem Strahl BA des Vielstrahls B homolog ist, diese Eigenschaft hat. Ueberhaupt kann man mit dem, dass man die Punkte des Umfangs nach Belieben zu construiren gelernt hat, zu jedem Punkt seine Polare, zu jeder Richtung ihren Pol, die in einem Punkt O convergirenden Tangente etc. finden, wie solches im Vorausgehenden schon einigemal gezeigt worden ist. Es bleibt nur noch zu sagen übrig, wie man zu den Elementen des Mittelpunktes gelangt. Der Convergenzpunkt T zweier durch A und B gehender Tangenten mit der Mitte S der Strecke AB verbunden, liefert die Richtung TS eines Durchmessers. Zwei solcher Durchmesser führen zum Mittelpunkt O

des Kegelschnitts. Hiermit ist aber die Aufgabe 88 auf 83 reduzirt. Die Aufgabe 89 kann vermittelst §. 103, c oder auch gestützt auf §. 104, b dadurch auf 88 reduzirt werden, dass man in dem Fünfeck MNOPQ, welches durch die gegebenen fünf Richtungen bestimmt wird. ein Eck M mit dem Convergenzpunkt S von NP und OQ verbindet, indem die Richtung MS auf OP den Berührungspunkt liefert. Ebenso findet man die übrigen Berührungspunkte.

90) Gegeben: vier Punkte A, B, C, D und eine Tangente a, welche durch den Punkt A geht.

91) Gegeben: vier Tangenten a, b, c, d und der Berührungspunkt A der Tangente a.

Construirt man die Convergenzpunkte E und F der Gegenseitenpaare AB, CD; AD, BC, so weiss man, dass die Tangente des Ecks C mit der Richtung a und mit der Diagonale EF in einem Punkt M convergirt; auf solche Weise wird man mit Leichtigkeit alle Tangenten der gegebenen Punkte construiren (§. 104, c). Da nun aber die conformen Vielstrahlen A, DBMC und C, DBAM gegeben sind, so liefert jedes Paar weiterer homologer Strahlen einen weiteren Punkt des Kegelschnitts.

Gleichermaassen wenn MNOP das Viereck ist, welches in Aufgabe 91 durch die vier gegebenen Tangenten bestimmt wird, so liefert der Convergenzpunkt S von OM und PN mit A verbunden eine Richtung, welche auf MN den Berührungspunkt C angibt (§. 104, d). Aehnlich findet man die übrigen Berührungspunkte, auch zeichnet man leicht noch beliebige weitere Tangenten durch Verbindung der homologen Punkte der conformen Reihen POAQ und MNQC, wenn Q der Convergenzpunkt der Seiten MN und PO ist.

92) Gegeben: vier Punkte A, B, C, D und eine Tangente e, welche durch keinen derselben geht.

93) Gegeben: vier Tangenten a, b, c, d und der Punkt E der Curve, welcher auf keiner jener Tangenten liegt.

Sucht man, gestützt auf §. 114, c, in der Involution, welche durch die Gegenseiten des Vierecks ABCD auf der Richtung e bestimmt wird, die Hauptpunkte, so kann jeder derselben als der fünfte Punkt der Curve betrachtet werden; sucht man ferner hinsichtlich der Aufgabe 93 in dem involutorischen Vielstrahl E, dessen Strahlen durch die 6 Ecken des von den Richtungen a, b, c, d gebildeten Vierseits gehen, die Hauptstrahlen, so kann jeder derselben als fünfte Tangente des Kegelschnitts gebraucht werden (§. 114, f). Die vorliegenden Aufgaben, deren jede eine zweifache Auflösung gestattet, sind somit auf 88 und 89 zurückgeführt.

94) Gegeben: drei Punkte A, B, C und

a) zwei Tangenten a und b, welche beziehungsweise durch die Punkte A und B gehen;

b) zwei Tangenten a und d, von welchen nur die erstere durch den gegebenen Punkt A geht;

c) zwei Tangenten d, e, von welchen keine durch einen der gegebenen Punkte geht.

95) Gegeben: drei Tangenten a, b, c und

a) zwei Punkte A und B, nämlich die Berührungspunkte der Tangenten A und B;

b) zwei Punkte A und D der Curve, von welchen der erste der Berührungspunkt der Tangente A ist;

c) zwei Punkte D und E der Curve, von welchen keiner mit den Berührungspunkten der gegebenen Tangente identisch ist.

Convergiren die gegebenen Tangenten a und b in Aufgabe 94, a in einem Punkt T, so ist die Conformität der projektivischen Vielstrahlen A, BCT und B, TCA, welche den Kegelschnitt erzeugen, bestimmt. Ganz auf ähnliche Weise wird auch 95, a behandelt. Die vier übrigen Aufgaben werden vermittelst der Aufgaben 31 und 32, oder vermittelst der Collineation gelöst. Sucht man nämlich in 95, c und b zum Dreieck ABC, welches durch die drei gegebenen Richtungen gebildet wird, dasjenige umbeschriebene Viereck MNRS, dessen Gegenseiten in den Ecken A, B, C convergiren, und sowohl durch die Seiten des Dreiecks, als durch die gegebenen Punkte D und E harmonisch getrennt werden, und zieht von einem Eck M dieses umbeschriebenen Vierecks durch D und E zwei Richtungen, so sind dieselben die Tangenten dieser Punkte, und die Aufgabe ist auf 89 zurückgeführt. Die Aufgabe gestattet vier Auflösungen. Für den besondern Fall 95, b existiren bloss zwei Auflösungen. Ganz ebenso werden 94, b und c vermittelst 32 aufgelöst.

Ebenso einfach und für die Zeichnung vielleicht noch bequemer, ist die Collineationsmethode. In 94, c zeichnet man einen Kreis, welcher die Richtungen d und e berührt, und der also für den Convergenzpunkt O dieser Richtungen als Centrum mit dem gesuchten Kegelschnitt perspektivisch liegt §. 122. Die Collineationsstrahlen OA, OB, OC bezeichnen auf der Kreislinie die homologen Punkte A′, B′, C′, und die Convergenzpunkte der homologen Seiten der Dreiecke ABC und A′B′C liefern die Collineationsaxe. Man wird also mit Leichtigkeit vermöge dieser Collineation beliebige Punkte und Tangenten auf dem gesuchten Kegelschnitt bestimmen.

Die Aufgabe 95, c wird dadurch der Collineationsmethode zugänglich gemacht, dass man eine Kreislinie durch die Punkte D und E legt; die Richtung DE ist die Axe der Collineation zwischen dem Kreis und dem Kegelschnitt §. 121, und die gegebenen Tangenten bezeichnen auf derselben

die Punkte α, β, γ, durch welche auch die homologen Tangenten des Kreises gehen. Sind die letzteren construirt, so bilden sie ein Dreieck, welches dem der Richtungen a, b, c homolog ist, auch führen die Verbindungslinien der homologen Ecken zum Collineationscentrum.

96) Gegeben: drei reelle Punkte A, B, C und zwei imaginäre Punkte der Curve, welche letztere durch die Involution $\delta\delta'\varepsilon\varepsilon'$ zweier Paare conjugirter Punkte einer Richtung bestimmt werden.

97) Gegeben: drei reelle Tangenten a, b, c und ein Paar imaginärer Tangenten, welche letztere durch die Involution O, $\delta\delta'\varepsilon\varepsilon'$ zweier in O conjugirter Richtungen bestimmt werden.

98) Gegeben: ein reeller Punkt A und zwei Paare imaginärer Punkte, bestimmt durch die einstimmigen involutorischen Punktreihen $\beta\beta'\gamma\gamma'$, $\delta\delta'\varepsilon\varepsilon'$.

99) Gegeben: eine reelle Tangente a und zwei Paare imaginärer Tangenten, bestimmt durch die einstimmigen involutorischen Vielstrahlen P, $\beta\beta'\gamma\gamma'$; Q, $\delta\delta'\varepsilon\varepsilon'$.

Es ist schon in den Erläuterungen des §. 118 gezeigt worden, *) wie die zwei letzteren Aufgaben auf die vorausgehenden 96 und 97, und diese auf 88 und 89 reduzirt werden.

XVIII. Oskulationen; in- und umbeschriebene Vielecke.

100) Ein Kegelschnitt K und ein Punkt C seiner Curve sind gegeben; man soll einen andern Kegelschnitt construiren, welcher denselben in dem Punkte C einfach berühre und noch

a) durch drei gegebene Punkte D, E, F gehe;
b) durch zwei gegebene Punkte D und E gehe und eine gegebene Richtung f berühre;
c) durch einen gegebenen Punkt D gehe und zwei gegebene Richtungen e und f berühre;
c) drei gegebene Richtungen d, e, f berühre.

Diese Aufgaben können nicht nur durch Collineation (vergl. §. 124), sondern auch dadurch aufgelöst werden, dass man durch C eine Tangente an den gegebenen Kegelschnitt zieht, und den gesuchten Kegelschnitt so zeichnet, dass er diese Tangente in dem Punkt C berührt, und noch die

---

*) Die Aufgabe 96 ist schon von Prof. v. Staudt auf einem andern Wege gelöst worden, die Aufgaben 98 und 99 sind neu. Man wird bemerken, dass die Berücksichtigung der imaginären Elemente noch zu einigen Aufgaben Anlass geben. Die vorstehenden sind jedoch die wichtigeren.

übrigen Bedingungen erfüllt. Dadurch werden die vorliegenden Aufgaben auf die Aufgaben 90, 91, 94 und 95 zurückgeführt.

101) Ein Kegelschnitt K und zwei Punkte C und D seiner Curve sind gegeben; man soll einen andern Kegelschnitt zeichnen, welcher den gegebenen Kegelschnitt in den zwei gegebenen Punkten berühre und noch

a) durch einen gegebenen Punkt E gehe;

b) eine gegebene Tangente e berühre.

Auch diese Aufgaben werden durch die Tangenten der Punkte C und D auf 94 und 95 zurückgeführt (vergl. auch §. 125).

102) Ein Kegelschnitt K und ein Punkt O seiner Curve sind gegeben; man soll einen zweiten Kegelschnitt construiren, welcher mit dem gegebenen in dem Punkte C eine Oskulation der zweiten Ordnung vollziehe und

a) durch zwei gegebene Punkte D und E gehe;

b) zwei gegebene Richtungen d und e berühre.

Die erste dieser zwei Aufgaben ist schon in §. 126 behandelt, und die zweite wird dadurch aufgelöst, dass man die Schnittpunkte δ und ε der gegebenen Richtungen mit der Tangente c des Oskulationspunktes C bemerkt, von denselben aus Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt zieht, den Convergenzpunkt F' derselben mit dem Convergenzpunkt F der gegebenen Tangenten verbindet und den Punkt $\mathfrak{O}$, in welchem die Tangente c von dieser Verbindungslinie getroffen wird, bemerkt. Der gesuchte Kegelschnitt ist für den Punkt $\mathfrak{O}$ als Centrum und der Richtung c als Axe dem gegebenen collineär und kann hiernach gezeichnet werden.

103) Ein Kegelschnitt K und ein Punkt O seiner Curve sind gegeben; man soll einen zweiten Kegelschnitt zeichnen, welcher mit dem ersten in dem Punkt O eine Oskulation der dritten Ordnung vollzieht und

a) durch einen gegebenen Punkt D geht;

b) eine gegebene Richtung α berührt.

Die Auflösungen dieser Aufgaben können schon nach §. 127 vollzogen werden.

104) Ein Kegelschnitt K und ein Punkt C seiner Curve sind gegeben; man soll seinen Krümmungskreis in dem Punkte C zeichnen (§. 128).

105) Ein Kegelschnitt K und ein Vieleck ABCD sind gegeben; man soll ein zweites Vieleck zeichnen, das

a) dem Kegelschnitt K inbeschrieben und dem Vieleck ABCD umbeschrieben sei;

b) dem Kegelschnitt K umbeschrieben und dem Vieleck ABCD inbeshrieben sei.

Ziehe durch den Punkt A eine Richtung, welche die Curve des Kegelschnitts in den Punkten α und $\mathfrak{a}$ schneiden wird, ziehe von α aus durch B eine zweite Richtung, welche auf der Curve den Punkt α'

bestimmt, bemerke ebenso auf der Curve den Schnittpunkt α'' der Richtung α'C, endlich den Schnittpunkt 𝔞' der Richtung α''D. Nun wiederhole man das gleiche Verfahren noch zwei Mal hinter einander, wodurch die Punkte 𝔟, 𝔟', 𝔠, 𝔠' bestimmt werden, und suche nun die Axe MN der centrischen Collineation, die durch die Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠 und 𝔞', 𝔟', 𝔠' der zwei collineären Systeme bestimmt ist (§. 129, a), welche die Curve entsprechend gemein haben, so hat jeder der Schnittpunkte M oder N die Eigenschaft, ein Eckpunkt des verlangten inbeschriebenen Vielecks zu sein. Ganz ähnlich wird auch die Aufgabe 105, b behandelt.

XIX. Ellipse.

106) Wenn eine Ellipse durch die erforderliche Anzahl von Bestimmungsstücken, wie sie in den 62 Aufgaben des XVII. Abschnitts aufgeführt sind, gegeben ist, so soll man die kleine Axe der Richtung und Grösse nach finden.

107) Eine Ellipse zu construiren, wenn die zwei Axen AB und 𝔄𝔅 der Grösse nach gegeben sind.

108) Eine Ellipse zu construiren, wenn zwei conjugirte Durchmesser der Richtung und Grösse nach gegeben sind.

Die Ellipse ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass sie lauter reelle und im endlichen Raum liegende Durchmesser, und also auch eine reelle zweite Axe hat. Wenn also die Bestimmungsstücke zu einem solchen Kegelschnitt führen, so kann man zu den Partialaufgaben des XVII. Abschnittes noch die der Construction der zweiten Axe hinzufügen. Weil aber in jenen allgemeinen Aufgaben bereits gezeigt ist, wie die Grösse jedes der Richtung nach gegebenen Durchmessers gefunden wird, und die Richtung der kleinen Axe wegen ihrer senkrechten Stellung zur grossen Axe bestimmt ist, so kann diese Forderung sogleich nach den allgemeinen Regeln, welche im XVII. Abschnitt angegeben wurden, erledigt werden. Es bieten übrigens die Eigenthümlichkeiten der Ellipse auch besondere Mittel zur Lösung dieser Partialaufgabe dar. Hierher gehören namentlich die Eigenschaften (§. 139, a u. e), wonach die Entfernung eines Endpunktes der kleinen Axe von einem Brennpunkt der halben grossen Axe gleich ist, und die Abschnitte, die auf einer Sekante zwischen einem Punkt der Curve und den Axenrichtungen liegen, so von einander abhängen, dass der eine der halben kleinen Axe gleich ist, so oft der andere die Länge der halben grossen Axe hat.

Andererseits können auch unter den Bestimmungsstücken der Ellipse zwei conjugirte Durchmesser ihrer Grösse und Lage nach gegeben sein, weil auch sie von endlicher Dimension sind, und dadurch können, wenn

es sich um die Construktion der Ellipse handelt, noch die in 107 und und 108 angeführten Construktionsaufgaben zu den allgemeinen hinzugefügt werden. Man sieht aber leicht, dass die Aufgaben 107 und 108 nach den Regeln der allgemeinen Aufgabe 81, c behandelt werden können. Es mag jedoch noch bemerkt werden, dass die Affinität der Ellipse mit jedem über einem ihrer Durchmesser construirten Kreise, eine der Ellipse eigenthümliche Methode darbietet, die sehr oft die allgemeine Methode an Einfachheit übertrifft. Die Ausführung kann übrigens dem Leser überlassen bleiben.

109) Einen Kreis zu construiren, wenn gegeben sind: ein reeller Punkt A und zwei imaginäre Punkte, welche durch die Involution $\beta\beta'\gamma\gamma'$ zweier conjugirter Punkte einer Richtung bestimmt sind.

Wenn man in dem Centralpunkt Q der involutorischen Reihe $\beta\beta'\gamma\gamma'$ eine Senkrechte errichtet, so liefert sie die Richtung QR eines Durchmessers. Sucht man nun noch die Normalstrahlen der Involution A, $\beta\beta'\gamma\gamma'$ so bezeichnen sie auf QR die Endpunkte des Durchmessers, und der gesuchte Kreis kann gezeichnet werden (vergl. Aufg. 98).

XX. Hyperbel.

110) Wenn eine Hyperbel durch die erforderliche Anzahl von Bestimmungsstücken, wie sie in den Aufgaben des XVII. Abschnitts aufgeführt sind, gegeben ist, so sollen die Asymptoten der Hyperbel gezeichnet werden.

In allen diesen Fällen werden die Eigenschaften der Asymptoten, welche in §. 144 angegeben sind, die Mittel zu ihrer Construktion liefern.

111) Eine Hyperbel zu construiren; wenn gegeben sind die zwei Asymptoten P𝔓 und p𝔭 und noch

a) ein Punkt C der Curve;

b) eine Tangente MN.

In der ersten dieser zwei Aufgaben wird die Anwendung der Eigenschaft, §. 145, b, zur Bestimmung solcher Punkte, welche auf den durch C gehenden Sekanten liegen, und die Eigenschaft §. 145, a zur Construktion der Tangente des Punktes C, und also auch zur Construktion der Tangente jedes andern nach dem Vorausgehenden construirten Punktes der Curve führen, und diese zwei Hauptaufgaben bilden die Grundlage zu allen anderen Partialaufgaben. Man wird übrigens auch leicht die Aufg. 111 a. auf 75 reduziren, wenn man nämlich die Axen construirt, welche die Winkel der Asymptoten halbiren; das geometrische Mittel Ob, zwischen den Abschnitten Oγ und Og, welche die Tangente des Punktes C auf den

Asymptoten bildet, ist den Entfernungen OF′ und OF″ der Brennpunkte vom Mittelpunkt gleich (§. 145, c), und wenn man aus O mit OF′ einen Kreis beschreibt, so bezeichnet er die Punkte b und b′, deren Verbindungslinie den Scheitel A der Axe bezeichnet. Die Aufgabe b wird auf a dadurch zurückgeführt, dass man den Berührungspunkt C derselben aufsucht, welcher die Strecke MN der Tangente halbirt, die zwischen den Asymptoten liegt.

112) Eine Hyperbel zu construiren, wenn gegeben sind: eine Asymptote P𝔓, ein Brennpunkt F′ und

a) ein Punkt C der Curve;

b) eine Tangente RS;

Weil die Asymptote P𝔓 eine Tangente der Hyperbel ist, deren Berührungspunkt als ihr Punkt des unendlichen Raumes bekannt ist, so können diese Aufgaben 112 a, b ganz nach den in Aufg. 78 b, c gegebenen Regeln construirt werden, sobald man dort P𝔓 für VW setzt.

113) Eine Hyperbel zu construiren, wenn gegeben sind: eine Asymptote P𝔓, auf derselben der Mittelpunkt O der Hyperbel und

a) die Punkte C, D der Curve;

b) ein Punkt C der Curve und eine Tangente RS;

c) zwei Tangenten MN, RS.

Auch diese Aufgaben können nach Aufgabe 83 b, c, d aufgelöst werden, wenn man P𝔓 für VW substituirt. Man wird z. B. in a die Richtung OE durch die Mitte E der Strecke CD und O𝔈 ∥ CD ziehen, dadurch gewinnt man die Richtungen OE und O𝔈, zweier conjugirter Durchmesser. Zieht man nun Op, so dass Op und OP die Richtungen OE und O𝔈 harmonisch trennen, so ist Op die andere Asymptote. Aehnlich modifiziren sich auch die zwei andern Aufgaben.

114) Eine Hyperbel zu construiren, wenn gegeben sind: die Richtung P𝔓 einer Asymptote und

a) drei Tangenten MN, RS, VW;

b) zwei Tangenten MN, RS und ein Punkt D der Curve;

c) eine Tangente MN und zwei Punkte C, D der Curve;

d) drei Punkte B, C, D der Curve.

Die Asymptote P𝔓 ist eine Tangente, deren Berührungspunkt 𝔓 als ihr Punkt des unendlichen Raumes bekannt ist; die Aufgaben 114 a, b, c, d sind daher dem Wesen nach identisch mit 91; 95 b; 94 b; 90, und können also auch nach dem dort angegebenen Verfahren aufgelöst werden.

115) Eine gleichseitige Hyperbel zu construiren, wenn gegeben sind:

a) die zwei Brennpunkte F′ und F″;

b) ein Brennpunkt F′ und die zugehörige Direktrize $\alpha\gamma$;

c) der Mittelpunkt O und zwei Punkte C, D der Curve;
d) der Mittelpunkt O und zwei Tangenten MN, RS;
e) der Mittelpunkt O und eine Tangente MN mit ihrem Berührungspunkt C.

Diese Aufgaben werden sich nach den allgemeinen Regeln leicht lösen lassen, wenn man noch die Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel §. 148 berücksichtigt.

XXI. Construktion der Parabel.

116) Gegeben: der Brennpunkt F' und
a) die Direktrize A'B';
b) die Richtung CD eines Durchmessers, und ein Punkt E der Curve
c) der Scheitel A der Axe;
d) zwei Punkte B und C der Curve;
e) zwei Tangenten MN, RS;
f) ein Punkt C der Curve und eine Tangente MN.

Wenn der Brennpunkt F' und die Direktrize gegeben sind, so ist man unmittelbar auf die Construktion §. 91 hingewiesen. Die dreizehn Partialaufgaben können alle nach den bei 75 angegebenen Methoden aufgelöst werden, nur wird man überall noch merkliche Vereinfachungen anbringen können. Der Scheitel A' halbirt die Entfernung F'A'' des Brennpunkts von der Direktrize. Sollen die Punkte der Curve gefunden werden, die auf irgend einer Richtung MN liegen, so kann die Collineationsmethode auf folgende Weise vereinfacht werden. Man construirt aus F' mit FA' (Fig. 131) einen Kreis, zieht durch A' und $\mathfrak{a}$ zwei Tangenten an den Kreis, so ist die eine A'γ die Collineationsaxe, und die andere $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ die Gegenaxe bei der Collineation des Kreises F'A' mit der gesuchten Parabel. Verbindet man also den Schnittpunkt γ der Richtung MN mit A'γ, und den Punkt $\mathfrak{c}$, welcher durch F'$\mathfrak{c}$ || MN auf der Gegenaxe bestimmt wird durch eine Gerade $\gamma\mathfrak{c}$, so liefert sie die homologe Richtung zu MN in dem System des Leitkreises, und die Halbmesser F'M' und F'N', welche an die Schnittpunkte gezogen werden, bestimmen die gesuchten Punkte M und N auf der Curve der Parabel. Soll man eine Tangente mit MN parallel ziehen, so zieht man F'$\mathfrak{c}$ || MN (Fig. 132), und von $\mathfrak{c}$ aus die Tangente $\mathfrak{c}$C' an den Kreis, alsdann bestimmt dieselbe den Punkt γ, durch welchen die verlangte Tangente γC || MN geht. Uebrigens gestaltet sich die reine Focalconstruktion der Tangenten, wenn Brennpunkt und Direktrize gegeben sind, noch einfacher. Ein weiteres Eingehen scheint übrigens nicht nothwendig. Es mag nur noch bemerkt werden, dass Aufgabe b auf a zurückgeführt wird, wenn man die Richtung ER || CD zieht, auf derselben EG = EF' nimmt und von G auf ER eine Senkrechte fällt, welches die gesuchte Direktrize ist; ferner, dass eine gemeinschaftliche Tangente zweier aus

B mit BF′ und aus C und CF′ beschriebener Kreise in Aufgabe d die Direktrize der Parabel liefert; ferner dass hinsichtlich der Aufgabe e die Verbindungslinie JK zweier Punkte J und K, welche so liegen, dass F′J und F′K durch MN und RS senkrecht halbirt werden, die Direktrize ist, und dass endlich auch diesem Verfahren ähnlich die Aufgabe f auf 116, a reduzirt wird.

117) Gegeben: die Richtung BC eines Durchmessers und

a) drei Punkte C, D, E der Curve;

b) zwei Punkte C, D der Curve und eine Tangente VW;

c) ein Punkt C der Curve und zwei Tangenten RS, VW;

d) drei Tangenten MN, RS, VW.

Weil jede Gerade AB, welche auf der gegebenen Richtung BC der Durchmesser senkrecht ist, als der Bogen des unendlich grossen Leitkreises, welcher im endlichen Raume liegt, betrachtet werden kann, so hat man hierin ein Mittel, um die Aufgaben 117, welche zu der Centralconstruktion zu gehören scheinen, durch eine Focalconstruktion aufzulösen. Zieht man aus den drei gegebenen Punkten C, D, E Kreise, welche alle die Richtung AB berühren; so ist derjenige andere Kreis, welcher diese drei Kreise gleichartig berührt, der zweite, endliche Leitkreis, und dessen Mittelpunkt ist der Brennpunkt F′ der Parabel, und hiemit ist die Aufgabe 117, a selbst auf 116 b zurückgeführt. Es mag noch bemerkt werden, dass die Construktion des Kreises F′, weil der zugehörige zweite Berührungskreis in der Gestalt der Geraden AB gegeben ist, sehr einfach auszuführen ist. Wenn statt eines Punktes eine Tangente, etwa VW, wie in den Aufgaben 117, b, c, d gegeben ist, welche die Richtung AB in einem Punkt V schneidet, so zieht man W′V so, dass die drei Richtungen W′V, WV und AB gleiche Winkel mit einander machen, alsdann hat der endliche Leitkreis der Parabel die Richtung W′V zu berühren.

118) Gegeben: vier Tangenten AA′, BB′, AB und A′B′.

Weil zwei Tangenten der Parabel durch alle übrigen Tangenten proportional getheilt werden, so kann man nach Aufgabe 10 auf zwei Tangenten AB und A′B′ (Fig. 127), zu jedem Punkt D der einen Reihe den homologen Punkt D′ der andern Reihe finden, und dadurch eine weitere Tangente DD′ bestimmen, man kann aber auch, wie diess in Fig. 127 geschehen ist, zu dem Convergenzpunkt C der Tangenten AB und A′B′ die homologen Punkte G und F aufsuchen, welche die Berührungspunkte der Tangenten sind. Auf diese Weise kann man nicht nur beliebige Tangenten, sondern auch ihre Berührungspunkte bestimmen. Selbst die in einem beliebig gegebenen Punkt P convergirenden Tangenten lassen sich nach Aufgabe 29 finden. Die Richtung der Durchmesser wird durch die Halbirungslinie CM der Strecke FG bestimmt, welche durch den Punkt C geht, und der Brennpunkt F der Parabel durch zwei Kreise, welche um

die Dreiecke AA'C und BB'C beschrieben werden (§. 154, d). Hiedurch ist die vorliegende Aufgabe auf 116 und 117 zurückgeführt.

119) Gegeben: vier Punkte A, B, C, D der Curve.

Es sei Z der Punkt der Parabel, welcher im unendlichen Raum liegt, AZ' und DZ'' *) die parallelen Durchmesser der Parabel, welche in dem Punkt Z des unendlichen Raumes convergiren, und auf den Richtungen CD und AB, welche in G convergiren, die Punkte E und F bestimmen, und z sei die Tangente des unendlich entfernten Punktes Z, so stellen die Richtungen AZ', AB, BC, CD, DZ'' und z die sechs Richtungen eines inbeschriebenen Sechsecks vor; es werden also die Richtungen der Gegenseiten BC und z in einem Punkt convergiren, welcher mit den Convergenzpunkten E und F der zwei anderen Paar Gegenseiten in einer Richtung liegt. Weil aber z selbst im unendlichen Raume liegt, so muss auch der Convergenzpunkt von BC und EF in demselben liegen, und also BC || EF sein. Diess vorausgesetzt, ist aber

$$FG : BG = EG : GC$$
$$FG : GD = AG : EG$$

woraus folgt:

$$FG^2 = \frac{BG \,.\, AG \,.\, GD}{GC}$$

Sucht man also zu BG und GD das geometrische Mittel p, so kann auf bekannte Art die unbekannte Strecke FG durch die Proportion $FG^2 : p^2 = AG : GC$ und ebendamit auch die Richtung FD der Durchmesser bestimmt werden. Weil übrigens die Strecke FG von G aus nach zwei Seiten hin auf der Richtung AG aufgetragen werden kann, so ergeben sich zwei Auflösungen. Durch die Bestimmung der Richtung FD des Durchmessers ist übrigens die vorliegende Aufgabe auf 117 zurückgeführt.

120) Gegeben: drei Punkte A, B, C und eine Tangente d.

Die gegebene Richtung d wird von der Richtung AB (Fig. 128) in einem Punkte D und von BC in einem Punkte E geschnitten werden. Sucht man nun auf der Richtung AB den Punkt F so, dass FD das geometrische Mittel von AD und BD, und ebenso auf der Richtung BC den Punkt G so, dass EG das geometrische Mittel von EB und EC ist, so ist GF die Richtung des der Tangente d zugeordneten Durchmessers, und die vorliegende Aufgabe ist auf 117 reduzirt. Dass wirklich F ein Punkt auf dem der Tangente d zugeordneten Durchmesser ist, kann leicht eingesehen werden; denn vorausgesetzt, es habe F diese Lage und es sei F'H' die Polare zu dem Punkt F, so folgt aus §. 152, c, dass FH' durch d halbirt wird, und weil F'H' || DE (§. 112, a), so ist auch DF = DF'. Weil nun aber AB durch die Punkte F und F' harmonisch getheilt wird (§. 106),

*) Man wird die zu Grunde liegende Figur leicht construiren.

so folgt aus §. 8, a, dass DF das geometrische Mittel zu DA und DB ist. Da die Punkte F und G auf der einen oder andern Seite von d liegen können, so hat die Aufgabe vier verschiedene Auflösungen.

121) Gegeben: zwei Punkte A und B, und zwei Tangenten c und d.

Die Richtungen c und d, welche in C convergiren, und von der Richtung AB in E und F geschnitten werden (Fig. 129), führen wie in der vorausgehenden Aufgabe zu den Punkten G und H der zu d und c conjugirten Durchmesser, indem man EG dem geometrischen Mittel von EA und EB und FH, dem geometrischen Mittel von FB und FA gleich macht. Zieht man von C aus eine Richtung CM, welche die Strecke GH halbirt, so liefert sie die Richtung der Parabeldurchmesser; denn die Richtung CM der Durchmesser, welche die Berührungssehne JK halbirt, wird auch alle Strecken und also auch die Strecke GH halbiren, welche zwischen den Richtungen der parallelen Durchmesser GJ und HK liegen. Auch diese Aufgabe hat vier Auflösungen.

122) Gegeben: ein Punkt A der Curve und drei Tangenten b, c, d.

Vorausgesetzt es sei a die Tangente des gegebenen Punktes A (Fig. 130), so bilden die drei gegebenen Tangenten mit der Tangente a und der Tangente des unendlichen Raumes ein umbeschriebenes Fünfeck XBCDY, oder wenn man auch A noch als den Convergenzpunkt zweier in der Richtung a vereinigter Tangenten betrachtet, ein umbeschriebenes Sechseck XBCDAY. Die Verbindungslinie der Gegenecken C und Y ist die Gerade CS, welche mit a parallel gezogen wird, und die Verbindungslinie der Gegenecken D und X ist die Gerade DS, welche mit b parallel gezogen wird. Hiedurch ist der Convergenzpunkt S und also auch die Verbindungslinie BS des dritten Paares der Gegenecken bestimmt, welche durch den Punkt A geht und die Richtung d in einem Punkt T schneiden wird. Ist nun R der Convergenzpunkt der Richtungen b und d, so folgt aus dem Parallelismus von CS und a, DS und b

$$DT : CT = AT : ST$$
$$DT : RT = ST : BT$$

woraus

$$DT^2 = \frac{CT \,.\, AT \,.\, RT}{BT}.$$

Hienach kann DT und also auch AD gefunden werden und dadurch ist die vorliegende Aufgabe auf 118 reduzirt. Die Aufgabe lässt zwei Auflösungen zu.

XXII. Berechnung der Ellipse.

123) Wenn die halbe grosse Axe mit a, die halbe kleine Axe mit b, die halbe Entfernung der Brennpunkte mit f, die halbe Entfernung der Direktrizen mit d, die Entfernung einer Direktrize von ihrem zugehörigen

Brennpunkt mit δ, der halbe Parameter mit p, und die Excentricität der Ellipse mit e bezeichnet wird, so ist

a) $f^2 = a^2 - b^2$;

b) $e = \frac{f}{a}, f = ae$;

c) $d = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{e}$;

d) $\delta = \frac{b^2}{f}$;

e) $p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$.

Alle diese Formeln ergeben sich so unmittelbar aus den §§. 139, 88, 99, dass es unnöthig scheint, in weitere Erläuterungen einzugehen.

124) Wenn die halbe, der grossen Axe conjugirte, Sehne, welche durch einen Punkt C der Curve geht, mit C, ihr Abstand vom Mittelpunkt mit $\mathfrak{C}$, die homologe Sehne in dem über der grossen Axe als Durchmesser construirten affinen Kreis mit C′, die Entfernung des Poles der Sehne C von der Sehne selbst und von den Scheitelpunkten der Axe beziehungsweise mit t, t′, t″, die Subnormale des Punktes C mit n, der halbe Durchmesser des Punktes C mit ϱ, dessen halber conjugirter Durchmesser mit ϱ', die zwei Brennstrahlen des Punktes C mit r′ und r″ bezeichnet werden, so ist:

a) $C = \frac{b}{a} C', = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \mathfrak{C}^2}$

b) $t = \frac{a^2 - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}}, \quad t' = \frac{(a - \mathfrak{C})\, a}{\mathfrak{C}}, \quad t'' = \frac{(a + \mathfrak{C})\, a}{\mathfrak{C}}$

c) $n = \frac{b^2}{a^2} \mathfrak{C}$,

d) $\varrho^2 = b^2 + e^2 \mathfrak{C}^2$,

e) $\varrho'^2 = a^2 - e^2 \mathfrak{C}^2$,

f) $r' = a + e\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C} = \frac{r' - a}{e}$,

g) $r'' = a - e\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C} = \frac{a - r''}{e}$

Wegen der Affinität der Ellipse mit dem über der Axe $A\mathfrak{A}$ als Durchmesser construirten Kreise ist (Fig. 85)

$$Cc : C'c = OB : OB' = OB : OA \quad \text{oder} \quad C = \frac{b}{a} . C',$$

während nach einem bekannten Satze der Kreislehre

$Ac : C'c = C'c : \mathfrak{A}c$ oder $(a - \mathfrak{C}) : C' = C' : (a + \mathfrak{C})$ also $C'^2 = a^2 - \mathfrak{C}^2$,

folglich $$C = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \mathfrak{E}^2}.$$

Weil durch zwei homologe Punkte des Kegelschnitts Pol und Polare harmonisch getrennt werden, so ist (Fig. 83)

$$T\mathfrak{A} : TA = \mathfrak{A}c : Ac; \text{ d. i. } t'' : t' = (a + \mathfrak{E}) : (a - \mathfrak{E}),$$

woraus $(t'' + t') : (t'' - t') = a : \mathfrak{E}$ oder $(t'' + t') : 2a = a : \mathfrak{E}$

folglich $t'' + t' = \frac{2a^2}{\mathfrak{E}}, \quad t'' - t' = 2a,$

hieraus $$t'' = \frac{a^2}{\mathfrak{E}} + a = \frac{a\,(a + \mathfrak{E})}{\mathfrak{E}}$$

$$t' = \frac{a^2}{\mathfrak{E}} - a = \frac{a\,(a - \mathfrak{E})}{\mathfrak{E}}$$

und weil $Tc = TA + Ac$ oder $t = t' + a - \mathfrak{E}$,

auch $$t = \frac{a^2}{\mathfrak{E}} - a + a - \mathfrak{E} = \frac{a^2}{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E} = \frac{a^2 - \mathfrak{E}^2}{\mathfrak{E}}.$$

Errichtet man nun in dem Punkt C der Tangente TC eine Senkrechte, welche die Axe in dem Punkte K schneidet, so ist Kc die Subnormale n des Punktes C. Das rechtwinklige Dreieck TCK, in welchem die halbe Sehne Cc die Höhe bildet, liefert:

$$Kc : Cc = Cc : Tc \text{ oder } n : C = C : t,$$

also $$n = \frac{C^2}{t} = C^2 : \frac{a^2 - \mathfrak{E}^2}{\mathfrak{E}} = \frac{C^2}{a^2 - \mathfrak{E}^2} \cdot \mathfrak{E}$$

oder weil $a^2 - \mathfrak{E}^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot C^2$, $n = \frac{b^2}{a^2} \cdot \mathfrak{E}$ (124, a).

Zieht man nun den Halbmesser OC, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck OCc auch $OC^2 = Oc^2 + Cc^2$, d. i.

$$\varrho^2 = \mathfrak{E}^2 + C^2 = \mathfrak{E}^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \mathfrak{E}^2) = \frac{a^2 b^2 + (a^2 - b^2)\,\mathfrak{E}^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2 + f^2 \mathfrak{E}^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2 + a^2 e^2 \mathfrak{E}^2}{a^2} = b^2 + e^2 \mathfrak{E}^2$$

und weil nach §. 139, f auch $\varrho^2 + \varrho'^2 = a^2 + b^2$, so folgt, dass

$$\varrho'^2 = a^2 + b^2 - \varrho^2 = a^2 + b^2 - b^2 - e^2 \mathfrak{E}^2 = a^2 - e^2 \mathfrak{E}^2.$$

Beschreibt man nun aus dem Punkte C mit dem Brennstrahl CF'' einen Kreis, welcher die Axe zum zweiten Mal in dem Punkte K, die Richtung F'C des andern Brennstrahls aber in den Punkten R und S schneidet, so ist nach einem bekannten Satze der Kreislehre

$$F'R : F'K = F'F'' : F'S,$$

aber weil $F'R = F'C - CR = r' - r''$

$F'S = F'C + CS = r' + r'' = 2a$

$F'K = F'F'' - F''K = 2\,OF'' - 2\,F''c = 2\,(OF'' - F''c)$

$= 2\,Oc = 2\,\mathfrak{E}$

auch $r' - r'' : 2\mathfrak{C} = 2f : 2a$

also $r' - r'' = \dfrac{4f\mathfrak{C}}{2a} = \dfrac{4ae\mathfrak{C}}{2a} = 2e\mathfrak{C}$,

und da $r' + r'' = 2a$,

so folgt $r' = a + e\mathfrak{C}$; $r'' = a - e\mathfrak{C}$.

125) Wird der Winkel, den der Durchmesser 2ϱ mit der Axe macht mit ω, und der Winkel, den er mit seinem conjugirten Durchmesser macht, mit φ und endlich der Winkel, den er mit der Brennweite macht, mit ψ bezeichnet, so ist

$$\text{a)}\ \frac{\cos\omega^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

$$\text{b)}\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2\, b^2}{e^2 C\mathfrak{C}}$$

$$\text{c)}\ \frac{p}{1 + e\cos\psi} = r''$$

In dem Dreieck $CO\mathfrak{c}$ (Fig. 83) ist $\angle CO\mathfrak{c} = \omega$,

$O\mathfrak{c} = OC\cos\omega$ oder $\mathfrak{C} = \varrho\cos\omega$

$C\mathfrak{c} = OC\sin\omega$ oder $C = \varrho\sin\omega$

und wenn man diese Werthe in 124, a substituirt, so erhält man 125, a.

Die rechtwinkligen Dreiecke $TC\mathfrak{c}$ und $OC\mathfrak{c}$ liefern

$$\operatorname{tg} TC\mathfrak{c} = \frac{T\mathfrak{c}}{C\mathfrak{c}} = t : C = \frac{a^2 - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}} : C = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{C}}\ (124, a)$$

$$\operatorname{tg} OC\mathfrak{c} = \mathfrak{C} : C,$$

$$\text{folglich}\ \operatorname{tg}(TC\mathfrak{c} + OC\mathfrak{c}) = \frac{\operatorname{tg} TC\mathfrak{c} + \operatorname{tg} OC\mathfrak{c}}{1 - \operatorname{tg} TC\mathfrak{c} \cdot \operatorname{tg} OC\mathfrak{c}}$$

und wenn man hier die Werthe der Tangenten aus den vorausgehenden Gleichungen substituirt, mit der Formel 124, a combinirt, so findet man den Ausdruck 125, b.

Das Dreieck $F''C\mathfrak{c}$ liefert, wenn man $\angle CF''A = \psi$ setzt,

$$F''C \cdot \cos\psi = -F''\mathfrak{c}\ \text{oder}\ r''\cos\psi = \mathfrak{C} - f$$

und wenn man die Werthe von f und $\mathfrak{C}$ aus 123, b und 124, g substituirt,

$$r''\cos\psi = \frac{a - r''}{e} - ae = \frac{a - r'' - ae^2}{e} = \frac{p - r''}{e}$$

126) Wenn man die Hälften zweier einander zugeordneten Durchmesser der Ellipse mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, irgend eine halbe Sehne, welche dem Durchmesser $\mathfrak{a}$ zugeordnet ist mit c, das Stück des Durchmessers, welches zwischen dieser Sehne und dem Mittelpunkt liegt mit $\mathfrak{c}$, die Stücke des Durchmessers, welche zwischen dem Pol der Sehne c, dieser Sehne selbst und den Scheiteln des Durchmessers liegen, mit t, t', t'' bezeichnet, so ist

$$\text{a)}\ c = \pm\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\sqrt{(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)}$$

b) $t = \frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{c}}$, $t' = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})}{\mathfrak{c}}$, $t'' = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})}{\mathfrak{c}}$

Sind $\mathfrak{a}\mathfrak{a}$ (Fig. 84) ein Durchmesser ($\mathfrak{a}$), $\mathfrak{b}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ der ihm conjugirte Durchmesser ($\mathfrak{b}$) und eine ihm conjugirte Sehne ($\mathfrak{c}$), und beschreibt man über $\mathfrak{a}\mathfrak{a}$ als Durchmesser einen Kreis, und zieht man in dem letztern $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \perp \mathfrak{a}\mathfrak{a}$ durch den Mittelpunkt c und $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}' \perp \mathfrak{a}\mathfrak{a}$ durch γ, so sind $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ homologe Linien der affinen Curven $\mathrm{ab}\mathfrak{a}$ und $\mathrm{ab}'\mathfrak{a}$ und es verhält sich

$$\mathrm{Ob} : \mathrm{Ob}' = \mathfrak{c}\gamma : \mathfrak{c}'\gamma \text{ oder } \mathfrak{b} : \mathfrak{a} = \mathfrak{c} : \mathfrak{c}',$$

folglich $\mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{c}' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \sqrt{(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)}$

Ferner wenn τ der Pol der Sehne $\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ ist: $\mathfrak{a}\gamma : \mathfrak{a}\gamma = \mathfrak{a}\tau : \mathfrak{a}\tau$ (§. 106),

d. i. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) : (\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) = t'' : t'$, also auch $\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = (t'' + t') : (t'' - t')$

und da $t'' - t' = 2\,\mathfrak{a}$,

so folgt $t'' + t' = \frac{2\,\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{c}}$

also $t'' = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})}{\mathfrak{c}}$, $t' = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})}{\mathfrak{c}}$

und $t = t' + (\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})}{\mathfrak{c}} + \mathfrak{a} - \mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{c}}$

127) Wird der Flächeninhalt der ganzen Ellipse mit Q, derjenige eines Abschnittes mit q oder $\mathfrak{q}$, je nachdem er von einer Sehne gebildet ist, die der Axe oder einem Durchmesser conjugirt ist, die homologen Abschnitte im affinen Kreis mit q' und $\mathfrak{q}'$, und der Winkel, welchen die Sehne im letztern Fall mit ihrem Durchmesser macht, mit ξ bezeichnet, so ist

$$\text{a) } Q = ab\pi = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi \sin \xi;$$

$$\text{b) } q = \frac{b}{a} q',$$

$$\text{c) } \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{q}' \sin \xi.$$

Diese Formeln folgen aus §. 140. Man wird bemerken, dass die Gerade bb' (Fig. 84) die Richtung der Collineationsstrahlen der Affinität bestimmt und dass also, wenn β der Schnittpunkt mit der Axe $\mathrm{a}\mathfrak{a}$ der Affinität ist, $b\beta : b'\beta$ dem Modulus der Affinität gleich ist, so dass also, wenn man noch $b\mathfrak{p} \perp \mathfrak{a}\mathfrak{a}$ zieht

$$\mathfrak{q} : \mathfrak{q}' = b\beta : b'\beta = b\mathfrak{p} : b'o,$$

während $b\mathfrak{p} = b'o \sin boa = \mathfrak{b} \sin\xi$, und $b'o = \mathfrak{a}$, folglich

$$\mathfrak{q} : \mathfrak{q}' = \mathfrak{b} \sin \xi : \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{q}' \sin \xi.$$

128) Die Gleichungen der Ellipse für die rechtwinklige und schief-

winklige Coordination des Mittelpunkts, für die Polcoordination des Mittelpunkts und die Polcoordination des Brennpunkts sind

$$\text{a)}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\text{b)}\ \frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1;$$

$$\text{c)}\ \frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2} = \frac{1}{\varrho^2};$$

$$\text{d)}\ r = \frac{p}{1 + e\cos\psi}.$$

Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus 124, a; 126, a; 125, a, e.

XXIII. Berechnung der Hyperbel.

129) Bei den gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe 123 findet man für die Hyperbel:

$$\text{a)}\ f^2 = a^2 + b^2;$$

$$\text{b)}\ e = \frac{f}{a},\ f = ae;$$

$$\text{c)}\ d = \frac{a^2}{f};$$

$$\text{d)}\ \delta = \frac{b^2}{f};$$

$$\text{e)}\ p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1).$$

130) Bei den gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe 124 findet man für die Hyperbel

$$\text{a)}\ C = \frac{b}{a} C' = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\mathfrak{E}^2 - a^2}$$

$$\text{b)}\ t'' = \frac{a(a + \mathfrak{E})}{\mathfrak{E}},\quad t' = \frac{a(\mathfrak{E} - a)}{a},\quad t = \frac{\mathfrak{E}^2 - a^2}{\mathfrak{E}}$$

$$\text{c)}\ n = \frac{b^2}{a^2} \cdot \mathfrak{E}$$

$$\text{d)}\ \varrho^2 = e^2 \mathfrak{E}^2 - b^2$$

$$\text{e)}\ r' = e\mathfrak{E} - a,\quad \mathfrak{E} = \frac{r' + a}{e}$$

$$\text{f)}\ r'' = e\mathfrak{E} + a,\quad \mathfrak{E} = \frac{r'' - a}{e}$$

131) Bei den gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe 125 findet man für die Hyperbel

$$a)\ \frac{\cos \omega^2}{a^2} - \frac{\sin \omega^2}{b^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

$$b)\ r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}$$

132) Bei den gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe 126 findet man für die Hyperbel

$$a)\ c = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \sqrt{(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2)}$$

$$b)\ t'' = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{c} + \mathfrak{a})}{\mathfrak{c}},\quad t' = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})}{\mathfrak{c}},\quad t = \frac{\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{c}}$$

Die Entwicklung dieser Formeln kann ebenfalls ganz auf die gleiche Weise, wie bei der Ellipse geschehen, wenn man über dem Durchmesser $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ als Axe eine gleichseitige Hyperbel construirt, und die Eigenschaften der Affinität in Anwendung bringt, welche zwischen Kegelschnitten stattfinden, die einen Durchmesser gemeinschaftlich haben. Die Fig. 97 wird für die Hyperbel das Gleiche leisten, was die Figur 84 für die Ellipse leistete.

133) Die Gleichungen der Hyperbel für die rechtwinklige und schiefwinklige Coordination des Mittelpunkts, für die Polarcoordination des Mittelpunkts und des Brennpunkts, und für die schiefwinklige Coordination der Asymptoten sind

$$a)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$b)\ \frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} - \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1;$$

$$c)\ \frac{\cos^2 \omega}{a^2} - \frac{\sin^2 \omega}{b^2} = \frac{1}{\varrho^2};$$

$$d)\ r = \frac{p}{1 + e \cos \psi};$$

$$e)\ 4\,xy = a^2 + b^2.$$

In Betreff der letzten Gleichung wird man bemerken, dass ▱ $OQ\mathfrak{Q}r = OBA\mathfrak{B}$ (Fig. 98) und also $OQ \cdot Qr = AB \cdot OB$. Weil aber die Axe OA den Asymptotenwinkel $BO\mathfrak{B}$ halbirt und das Parallelogramm $OBA\mathfrak{B}$ die Gestalt eines Rhombus hat, so ist $AB \cdot OB = OB^2$, und weil $B\mathfrak{B} \parallel b\mathfrak{b}$ ist und die Diagonalen OA und $B\mathfrak{B}$ sich halbiren, so ist $OB = \frac{1}{2}\,Ob$, folglich $OQ \cdot Qr = \frac{1}{4}\,Ob^2$ und $Ob^2 = OA^2 + Ab^2 = a^2 + b^2$ folglich $OQ \cdot Qr = \frac{a^2 + b^2}{4}$ oder $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

Alles Uebrige was in dieser und den vorausgehenden Aufgaben über die Hyperbel ausgesagt ist, ist dem, was bei der Ellipse bemerkt wurde, so ähnlich, dass ein weiteres Eingehen überflüssig scheint.

XXIV. Berechnung der Parabel.

134) Wenn die halbe der Axe conjugirte Sehne mit C, der Winkel, den sie mit ihrer Endestangente macht, mit ξ; ihr Abstand vom Scheitel mit $\mathfrak{C}$; die Entfernungen ihres Poles von der Sehne selbst und vom Scheitel mit t und t'; die zugehörige Subnormale mit n; der zugehörige Brennstrahl und dessen Winkel mit der Brennweite mit r und ψ, der halbe Parameter mit p und die Fläche des von der Sehne C gebildeten Abschnitts mit Q bezeichnet wird, so ist

a) $C^2 = 2\, p\, \mathfrak{C}$;
b) $t = 2\mathfrak{C}$, $t' = \mathfrak{C}$;
c) $\operatorname{cotg} \xi = p$;
d) $n = p$;
e) $r = \frac{1}{2} p + \mathfrak{C}$;
f) $\cos {}^2\psi = \frac{p}{2\, r}$;
g) $Q = \frac{4}{3}\, C\mathfrak{C}$.

Wenn die Sehne $C\mathfrak{C}$ (Fig. 103) der Axe conjugirt ist, so ist ihre Hälfte $CP = PT\,.\,PN$ (§. 151, c) oder $C = 2\, p\, \mathfrak{C}$, $n = p$ (§. 153, d), $t = 2\,.\,\mathfrak{C}$, $t' = \mathfrak{C}$ (§. 152, b), $FC = CC'' = A''P = AA'' + AP = \frac{1}{2} p + \mathfrak{C}$ (§. 151, b).

$$\operatorname{cotg}\ PCT = \frac{CP}{PT}, \text{ oder } \operatorname{cotg} \xi = \frac{2p\mathfrak{C}}{2\mathfrak{C}} = p$$

$$\angle\, CNP = \tfrac{1}{2}\ CFA = \frac{\psi}{2}\ (\text{§. 153, c}),$$

$$\cos^2 CNP = \frac{NP^2}{CN^2} = \frac{NP}{NT} \text{ d. i. } \cos^2 \frac{\psi}{2} = \frac{p}{2\, r},$$

$$CA\mathfrak{C} = \tfrac{2}{3}\,.\,C\mathfrak{C}\,.\,AP = \frac{C\mathfrak{C}\,.\,PT}{3}\ (\text{§. 155}),$$

$$\text{also } Q = \frac{2\, C\,.\,2\,\mathfrak{C}}{3} = \tfrac{4}{3}\, C\mathfrak{C}.$$

135) Wenn c die Hälfte irgend einer Sehne der Parabel, $\mathfrak{c}$ das Stück, welches sie von ihrem conjugirten Durchmesser abschneidet, φ den Winkel, den sie mit diesem Durchmesser bildet, t und t' die Entfernungen ihres Poles von der Sehne selbst und vom Scheitel des conjugirten Durchmessers, $\mathfrak{p}$ den Nebenparameter, welcher demselben Durchmesser conjugirt ist, und $\mathfrak{Q}$ den Inhalt des Parabelabschnittes bezeichnet, den die Sehne bildet, so ist

a) $c^2 = 2\, \mathfrak{p}\, \mathfrak{c}$;
b) $t = 2\, \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$;
c) $\mathfrak{Q} = \frac{4}{3}\, c\mathfrak{c} \sin \varphi$.

Beschreibt man über $\mathfrak{ac}$ Fig. 107 als Axe eine zweite Parabel, welche denselben Parameter p hat, so ist dieselbe der gegebenen Parabel perspektivisch affin. Construirt man nun in der Hilfsparabel die halbe Sehne $c'\mathfrak{c} = c'$, welche der gegebenen homolog ist, so ist $c'^2 = 2\,p\,\mathfrak{c}$, und wenn man das Verhältniss $c' : c$ der affinen Sehnen mit m bezeichnet und $c' : c = m$, also

$$c' = m\,c \text{ ist, so ist } m^2\,c^2 = 2\,p\,\mathfrak{c}, \quad c^2 = 2\,\frac{p}{m^2}\cdot\mathfrak{c}.$$

Die Grösse $\frac{p}{m^2}$ ist constant. Setzt man nun für $\mathfrak{c}$ die Grösse $\frac{1}{2}\,\frac{p}{m^2}$, so liefert die letzte Gleichung gerade diejenige Sehne C für welche

$$C^2 = \left(\frac{p}{m^2}\right)^2 \text{ d. i. } C = \frac{p}{m^2}$$

d. h. sie liefert die demselben Durchmesser conjugirte halbe Sehne, welche gerade doppelt so gross ist als das Stück, das sie vom Durchmesser abschneidet. Diese Sehne C ist also der Nebenparameter $\mathfrak{p}$, der dem Durchmesser conjugirt ist, folglich ist $c^2 = 2\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{c}$ (§. 152, d).

Die Berechnung des Parabelabschnittes $\mathfrak{Q}$ ergibt sich unmittelbar aus §. 155.

Anhang.

Anwendung der neueren Geometrie auf einige Lehren der Optik.

A. Reflexion des Lichts auf dem sphärischen Spiegel.

Es gibt mehrere Wege um das Reflexionsgesetz des Lichtes auf dem sphärischen Spiegel abzuleiten, aber kaum wird man einen finden, der so leicht zum Ziele führt, als derjenige, den die Methode der neueren Geometrie an die Hand gibt. Der letztere hat überdiess noch den Vortheil, dass er dieses Reflexionsgesetz auf einen sehr einfachen Ausdruck bringt, der selbst noch da anwendbar ist, wo ausgedehnte Objekte sich im Spiegel reflektiren. Es mag daher das folgende Beispiel zeigen, wie die Methode der neueren Geometrie auch in ihrer Anwendung auf anderweitige Gegenstände wesentliche Vortheile darbietet.

In der Figur 26 stellt CMN eine Meridianebene, MN ein Stück des Meridianbogens und C den Mittelpunkt desselben vor; in der Ebene dieses Bogens ist B ein beliebiger leuchtender Punkt vor dem Spiegel, BA und BM sind zwei von demselben ausgehende und in den Punkten A und M auf den Spiegel fallende Strahlen, von welchen der erste durch den Mittelpunkt C geht, während der zweite einen sehr kleinen Winkel MBA mit demselben macht; man fragt nun nach der Lage des Punktes, in welchem die reflektirten Strahlen convergiren. Weil nun der Strahl BA durch den Mittelpunkt C geht, und daher in A senkrecht zur Kugelfläche steht, so wird er wieder in derselben Richtung AB reflektirt, in welcher er einfällt. Der andere Strahl BM wird in der Meridianebene BMA so reflektirt, dass der reflektirte Strahl MB′ mit dem nach M gezogenen Halbmesser einen Winkel CMB′ = CMB macht, da der Halbmesser CM das Einfallsloth ist, und der einfallende und reflektirte Strahl gleiche Winkel mit dem Einfallsloth machen.

Diess sind die Bestimmungsstücke, welche das allgemeine Reflexionsgesetz an die Hand gibt; und nun soll durch die Methode der neueren Geometrie die Lage des Convergenzpunktes B′ ermittelt werden. Zu dem Ende zieht man in dem Punkt M des Meridianbogens eine Tangente, welche den Centralstrahl BA in einem Punkte T schneiden wird. Dadurch entsteht an dem Punkt M ein Vierstrahl, in welchem zwei nicht aneinander liegende Strahlen MC und MT senkrecht aufeinander stehen, während die zwei andern Strahlen MB und MB′ gleiche Winkel mit MC machen. Es ist also der Vielstrahl M harmonisch (§. 72, d), und es sind also auch die Punkte B, C, B′ und T welche er auf dem Centralstrahl BA bezeichnet, vier harmonische Punkte. Bei der anfänglichen Voraussetzung, dass nämlich der Winkel ABM ein unendlich kleiner sei, muss auch der Bogen AM selbst eine unendlich kleine Grösse sein, und in diesem Fall fällt die Tangente mit dem Bogen, und also auch der Punkt T mit dem Punkt A zusammen. Unter der Voraussetzung also, dass der Winkel B eine verschwindende Grösse sei, sind auch die Punkte A, B′, C, B vier harmonische Punkte. Da nun aber der Punkt B′ durch den harmonisch zugeordneten leuchtenden Punkt B vollkommen bestimmt ist, so müssen alle Strahlen, welche von dem leuchtenden Punkt B ausgehen und nur um ein unendlich Kleines von demselben abweichen, in demselben Punkt B′ convergiren. Auch sieht man, dass B und B′ mit einander vertauscht werden können, so nämlich, dass wenn B′ ein leuchtender Punkt ist, die reflektirten Strahlen im Punkte B convergiren müssen. Es heissen desshalb zwei solche Punkte wie B und B′ „einander zugeordnete Brennpunkte“ und das Reflexionsgesetz des sphärischen Spiegels kann in folgende Worte gefasst werden:

Je zwei einander zugeordnete Brennpunkte liegen in der Richtung eines Centralstrahls und theilen den Halbmesser dieser Richtung harmonisch.

Diese Form des Reflexionsgesetzes des sphärischen Spiegels, welches die Methode der neueren Geometrie an die Hand gibt, macht sich durch zwei wesentliche Vortheile bemerklich. Einmal führt es ganz direkt zur Kenntniss derjenigen besonderen Fälle, welche durch die besondere Lage des leuchtenden Punktes sich ergeben. So zeigt der Begriff der harmonischen Theilung unmittelbar, dass der Hauptbrennpunkt F′ in der Mitte des Halbmessers AC liegt (§. 7); es zeigt der Begriff der harmonischen Theilung weiter, dass allen leuchtenden Punkten zwischen dem Mittelpunkt C und dem unendlich entfernten Punkte F reelle Brennpunkte zwischen C und F′, und allen leuchtenden Punkten zwischen C und F′ reelle Brennpunkte zwischen C und F zugeordnet sind, dass ferner allen leuchtenden Punkten zwischen dem Hauptbrennpunkt F′ und dem Punkt A der Spiegelfläche nur solche Brennpunkte zugeordnet sind die hinter der



Spiegelfläche liegen, und die man daher virtuelle heisst. Denn die Punkte der Hälften F'C und F'A des Halbmessers AC sind den Punkten harmonisch zugeordnet, welche auf den entsprechenden Verlängerungen dieser Geraden liegen. Ein zweiter Vortheil, den obige Form des Reflexionsgesetzes des sphärischen Spiegels gewährt, besteht darin, dass dasselbe auch ebenso direkt zur Kenntniss derjenigen Fälle führt, welche die Gestalt des Spiegels unterscheiden lässt. Denn auch in den Fällen, wo der Hohlspiegel in einen Convexspiegel, oder auch in einen planen Spiegel übergeht, bleibt doch obiges Gesetz unveränderlich stehen, immerhin theilen zwei einander zugeordnete Brennpunkte den Halbmesser des Spiegels, auf dessen Richtung sie liegen, harmonisch. Dass dem wirklich so sei, das wird man sehen, sobald man die Geraden BM, CM und B'M über M hinaus verlängert, indem diese Verlängerungen alsdann sogleich das Phänomen einer Reflexion auf dem Convexspiegel darstellen, ohne dass eine Aenderung in der Lage der Punkte B, C, B', A eingetreten wäre. Weil aber nun im Convexspiegel das Objekt nur bis zum Punkt A der Spiegelfläche hintreten, nicht aber eine Stelle innerhalb des Halbmessers einnehmen kann, so muss der zugeordnete Brennpunkt stets auf der zugekehrten Hälfte des Halbmessers selbst, also hinter der Spiegelfläche liegen; man sagt daher, dass allen leuchtenden Punkten vor der convexen Spiegelfläche nur virtuelle Brennpunkte zugeordnet seien.

Will man nun aber auch die bekannte sonst übliche Formel für die Reflexion auf dem sphärischen Spiegel haben, so kann man sie auf folgende Weise finden. Ein Gesetz der harmonischen Theilung lehrt (§. 8, a), dass

$$F'A^2 = F'B \,.\, F'B'$$

Bezeichnet man hier F'A mit p, BA mit b und B'A mit b', so folgt für den Fall des Concavspiegels

$$F'B = b - p$$
$$F'B' = b' - p$$

folglich $p^2 = (b - p) \,.\, (b' - p)$

$$\frac{1}{b'} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$$

und für den Fall des Convexspiegels

$$p^2 = (p + b)\,(p - b')$$

$$\frac{1}{b'} - \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

Zu den bisher berührten Vortheilen, welche die Anwendung der Methode der neueren Geometrie auf die sphärischen Spiegel gewährt, gesellt sich noch ein anderer nicht weniger beachtenswerther; nämlich der, dass sie auch sogleich Mittel an die Hand giebt, das Reflexionsgesetz auf körperlich räumliche Objekte auszudehnen, eine Verallgemeinerung und Vollendung des Reflexionsgesetzes, welche meines Wissens noch nicht

versucht wurde, gleichwohl aber auf einen ebenso einfachen Ausdruck reduzirt werden kann, als der des besonderen Falles für die conjugirten Brennpunkte. Sind nämlich B, C und D (Fig. 28) leuchtende Punkte vor einem aus dem Punkte O beschriebenen sphärischen Spiegel, deren Entfernungen von einander und dem Mittelpunkt O so beschaffen sind, dass die Winkel DOB und DOC klein genug sind, um als verschwindende Grössen betrachtet werden zu können, so werden dem Vorausgehenden gemäss ihre conjugirten Brennpunkte B', C' und D' auf den Centralen BA, CM und DN so liegen, dass jedes Paar dieser einander zugeordneten Brennpunkte den Halbmesser, auf dessen Richtung es liegt, harmonisch theilt. Man bemerke aber, dass diese Bedingung, unter welcher dieses Reflexionsgesetz anwendbar ist, vorausgesetzt, dass auch der Meridianbogen MN nur ein unendlich kleiner Theil des ganzen Kreisumfanges ist. Für einen solchen kleinen Bogen kann aber von dem Unterschied der Lage abgesehen werden, welcher sonst zwischen dem Bogen und seiner Tangente wahrgenommen wird. Zieht man also durch A eine Tangente an den Bogen, so kann man annehmen, dass sie, soweit als der Bogen sich erstreckt, auf welchem die Reflexion geschieht, mit demselben zusammenfalle. Unter dieser Voraussetzung sind aber die Geraden OM, OA und ON Strahlen zwischen dem Centrum O und einer Transversalen $\beta\delta$, welche durch die zugeordneten Brennpunkte C und C', B und B', D und D' harmonisch getheilt werden. In diesem Falle lehrt aber die neuere Geometrie, dass die zugeordneten Brennpunkte homologe Punkte zweier involutorisch collineären Systeme seien, die den Punkt O zum Centrum und die Tangente $\beta\delta$ zur Axe haben (§. 48, b). Dieses Gesetz gilt von allen im Raum zerstreuten leuchtenden Punkten, wenn sie nur weit genug vom Mittelpunkt O entfernt sind, und einander so nahe stehen, dass die Winkel, unter welchen man sie von O aus sieht, als verschwindende Grössen betrachtet werden können. Es kann also das Brechungsgesetz auf dem sphärischen Spiegel auf folgenden Ausdruck gebracht werden:

Bei der Brechung des Lichtes auf einem sphärischen Spiegel sind Bild und Objekt homologe Gestalten zweier räumlichen involutorischen Systeme, welche den Mittelpunkt des Spiegels zum Centrum, und die Tangentialfläche des Spiegels zur Axenebene ihrer Collineation haben.

Hieraus ergeben sich folgende besondere Fälle dieses allgemeinen Gesetzes:

1) das Bild einer Geraden hat wieder die Gestalt einer Geraden; das Bild einer Ebene hat wieder die Gestalt einer Ebene, krumme Linien und Flächen haben wieder krumme Linien und Flächen zu ihren Bildern.

2) Bild und Objekt sind nur in dem Falle einander ähnlich, wenn sie ebene Gestalten sind, die eine parallele Lage zur Axenebene haben. So oft aber das Objekt eine ebene Gestalt ist, die der Axenebene parallel ist, so ist auch ihr Bild eine ebene, zur Axenebene parallele Gestalt, die ihrem Objekt ähnlich ist. Sind Bild und Objekt allseitig ausgedehnte Gestalten, so sind sie einander nicht ähnlich.

3) Diese Beschränkungen fallen weg, wenn der sphärische Spiegel in einen ebenen übergeht. Alle Gestalten, auch die körperlich ausgedehnten, sind in diesem Fall uniform. Auch fallen die Beschränkungen weg, welche dem ganzen Reflexionsgesetz zu Grunde liegen, dass nämlich der Spiegel nur ein unendlich kleiner Theil der ganzen Kugeloberfläche sein darf, oder diese Beschränkung ist vielmehr stets erfüllt, weil jeder ebene Spiegel immer in diesem Verhältniss zu der Ebene steht, der er angehört.

Es mag noch bemerkt werden, dass das Collineationsgesetz einfache Mittel bietet, um zu jedem gegebenen Objekt sogleich sein Bild zu construiren; es wird jedoch genügen, auf die Fig. 28 hinzuweisen und die Sache in Anregung gebracht zu haben.

B. Brechung des Lichts auf der Kugeloberfläche.

Wie das allgemeine Brechungsgesetz eines Lichtstrahls, der von einem Medium in ein anderes übergeht, complizirter ist, als das Reflexionsgesetz, und selbst ohne trigonometrische Begriffe nicht gefasst werden kann, so machte auch die Ableitung des Gesetzes der Brechung auf der Kugelfläche stets mehr Schwierigkeit, und wurde häufig durch trigonometrische Rechnungen vermittelt. Bringt man aber auch hier die Methode der neueren Geometrie in Anwendung, so ergibt sich sowohl die Ableitung des Gesetzes, als auch der Ausdruck, in welchen es gefasst werden kann, mit derselben Leichtigkeit, und ebenso einfach als diess bei der Reflexion des Lichts geschah. In diesem Fall wird man daher der Methode der neueren Geometrie, die meines Wissens bis jetzt noch nicht auf die Brechung des Lichtes angewendet wurde, unstreitbar den Vorzug einräumen müssen.

In der Figur 27 stellt MN wieder einen Meridianbogen einer aus C beschriebenen Kugelfläche vor, welche zwei Medien von einander trennt, von welchen das eine auf der Seite des Mittelpunktes C, das andere jenseits der Kugelfläche liegt. Es ist ferner B ein leuchtender Punkt vor der Kugelfläche, der unter anderm die Strahlen BA und BM nach derselben sendet, von welchen auch hier angenommen wird, dass der eine BA durch den Mittelpunkt C der Kugelfläche gehe, und dass der andere BM nur um ein unendlich Kleines von BA abweiche; man

will nun den Convergenzpunkt der gebrochenen Strahlen kennen lernen. Weil der Strahl BA durch den Mittelpunkt C der Kugelfläche geht und daher in A senkrecht zu derselben steht, so wird er gar nicht abgelenkt, sondern behält die Richtung AC bei. Um die Richtung des Strahls BM zu finden, die er nach erlittener Brechung verfolgt, zieht man den Halbmesser CM, der in seiner Verlängerung MD das Einfallsloth darstellt. Ist nun MB′ der gebrochene Strahl und ME dessen Verlängerung, so müssen die Sinus der Winkel BMD und EMD einer constanten Grösse gleich sein, welche der Brechungscoefficient λ zwischen den zwei gegebenen Mitteln heisst. Erwägt man aber, dass man es in dem vorliegenden Falle nur mit so kleinen Winkeln zu thun hat, die im Verschwinden begriffen sind, so überzeugt man sich sogleich, dass man für das Verhältniss der Sinus dieser Winkel auch das der Tangenten setzen kann, da für sehr kleine Winkel die Sinus den Tangenten proportional sind. Fällt man also von B aus auf die Richtung des Einfallsloths MD die Senkrechte BD, welche die Richtung des gebrochenen Strahls in E schneidet, so sind die Abschnitte BD und ED den Tangenten der Winkel BMD und EMD proportional, und es ist das Verhältniss BD : ED dem Brechungscoefficienten λ gleich. Diess sind die Bestimmungen, welche das allgemeine Brechungsgesetz zur Auffindung der Lage des Punktes B′ liefert, und nun soll durch die Methode der neueren Geometrie diess wirklich geschehen. Zu dem Ende zieht man noch in M eine Tangente, welche den Centralstrahl BA in T trifft; dadurch erhält man in dem Punkte M einen Vierstrahl M, TBED, welcher alle Transversalen, also auch die Graden BC und BD conform theilen wird (§. 29). Bei dieser Theilung ist der Punkt B beiden Geraden gemeinschaftlich, der Punkt E ist dem Punkt B′, der Punkt D dem Punkte C, und weil MT || BD ist, ein unendlich entfernter Punkt $\mathfrak{T}$ der Geraden BD dem Punkte T homolog, folglich $BED\mathfrak{T} \barwedge BB'CT$

$$\frac{BD}{ED} : \frac{B\mathfrak{T}}{E\mathfrak{T}} = \frac{BC}{B'C} : \frac{BT}{B'T}$$

oder da $\dfrac{B\mathfrak{T}}{E\mathfrak{T}} = \dfrac{\infty}{\infty} = 1$

also $\dfrac{BC}{B'C} : \dfrac{BT}{B'T} = \dfrac{BD}{ED} = \lambda.$

Wegen der unendlich kleinen Winkel ist aber auch AM nur ein unendlich kleiner Theil des ganzen Kreisumfanges, und die Tangente differirt selbst nur unendlich wenig von ihrem Bogen, es können also auch die Punkte A und T als zusammenfallend betrachtet werden, folglich ist

$$\frac{BC}{B'C} : \frac{BA}{B'A} = \lambda.$$

Die Lage des Convergenzpunktes B' des gebrochenen Strahls ist hiernach durch die Lage des leuchtenden Punktes und den Brechungscoefficienten vollkommen bestimmt, es müssen also alle Strahlen, welche vom Punkte B ausgehen und nur sehr wenig vom Centralstrahl BC abweichen, in demselben Punkte B' convergiren. Es sind also B und B' zwei conjugirte Brennpunkte. Man sieht aber aus der unmittelbar vorausgehenden Formel, dass die conjugirten Brennpunkte B und B' ihrer Ableitung nach stets äussere Punkte des Halbmessers AC sind, also gleichartige Lage gegen denselben haben, und ihn überdiess in einem Doppelverhältniss theilen, welches den constanten Werth λ hat. Es bedingen also die conjugirten Brennpunkte, welche auf einem Centralstrahl der Kugelfläche liegen, eine anharmonisch proportionale Theilung desselben. Man kann daher das Brechungsgesetz auf der Kugeloberfläche in folgende einfache Form bringen:

Der Halbmesser der Kugeloberfläche, welche zwei Medien von verschiedener Dichtigkeit trennt, wird von je zwei conjugirten Brennpunkten seiner Richtung anharmonisch proportional getheilt, und zwar ist der Modulus dieser Theilung dem Brechungscoefficienten zwischen diesen Medien gleich.

Um alle Zweideutigkeit zu vermeiden, welche diese Fassung des Brechungsgesetzes noch darbieten möchte, ist noch zu bemerken, dass das Doppelverhältniss in der Ordnung genommen werden muss, welche in obiger Formel sichtbar ist, und welche durch das Symbol CA, BB' ausgedrückt wird; und dass der Brechungscoefficient für den Fall eingerichtet sein muss, welchen der Lichstrahl darbietet, wenn er von B nach B' geht. Gewöhnlich gibt man dem Brechungscoefficienten die Grösse, welche ihm zukommt, wenn das Licht vom dünneren in das dichtere Medium übergeht. Hält man auch hier diese Bestimmung fest, so muss man allemal $\frac{1}{\lambda}$ statt λ setzen, sobald das Licht eine entgegengesetzte Richtung hat. Liegt also B im dünneren und B' im dichteren Medium, so bleibt obige Formel unverändert; sollte man aber mittelst obigen Gesetzes die Lage des Punktes B suchen, wenn der leuchtende Punkt in dem Punkt B' des dichteren Mittels sich befindet, so hat man, indem man sich streng an jene Regel und an das Symbol CA, B'B hält

$$\frac{CB'}{AB'} : \frac{CB}{AB} = \frac{1}{\lambda}$$

ein Ausdruck, der wieder identisch ist mit

$$\frac{CB}{AB} : \frac{CB'}{AB'} = \lambda.$$

so dass man sieht, dass B und B' wirklich als conjugirte Punkte erscheinen, indem das Licht denselben Weg macht; es mag von B oder von B' ausgehen.

Hiemit ist aber zugleich gesagt, dass das angeführte Gesetz keine Modifikation erleide, wenn der leuchtende Punkt auf der concaven statt auf der convexen Seite der Kugelfläche liegt, und ebenso wenig wird es alterirt, wenn das dünnere Medium auf der Seite des Kugelmittelpunktes sich befindet; es kann also in allen diesen Fällen das oben ausgesprochene Gesetz mit derselben Leichtigkeit und Sicherheit angewendet werden.

Unter den durch ihre Lage ausgezeichneten conjugirten Brennpunkten sind die Grenzpunkte A und C des Kugelhalbmessers zuerst zu nennen. In jedem derselben sind zwei conjugirte Brennpunkte vereinigt (§. 12, a). Diess ist auch von selbst einleuchtend, denn die Strahlen, welche von dem Mittelpunkt C der Kugeloberfläche selbst ausgehen, stehen überall auf der Kugelfläche senkrecht und werden nicht gebrochen, so dass der Convergenzpunkt der gebrochenen Strahlen selbst wieder im Mittelpunkt der Kugelfläche ist; und auch die Strahlen, welche von einem Punkt A der Kugelfläche selbst ausgehen, werden ebenfalls nicht gebrochen, da der Punkt A bereits dem Medium angehört, in welches er seine Strahlen sendet.

In Betreff der anderen Punkte ist zu bemerken, dass man einen Brennpunkt der gebrochenen Strahlen reell heisst, wenn dieselben wirklich in ihm convergiren, und dass er aber virtuell heisst, wenn sie nach der Brechung so divergiren, als gingen sie von einem Punkte aus.

Diejenigen Brennpunkte, welche den Punkten des unendlichen Raumes zugeordnet sind, heissen Hauptbrennpunkte, dieselben sind also identisch mit den Gegenpunkten der anharmonisch proportionalen Theilung; und weil diese zum besondern Fall der gleichartigen Lage gehören, so existiren ihrer zwei und liegen auf der Verlängerung des Kugelhalbmessers AC und haben eine symmetrische Lage gegen denselben (§. 12, b).

Ist das Medium, welches auf der Seite des Kugelmittelpunktes liegt, das dichtere, so hat der Brennpunkt F, welcher vor der Kugelfläche im dünneren Medium liegt, seinen conjugirten Brennpunkt hinter der Kugelfläche, alle parallele Strahlen, welche von dieser Seite herkommen, werden in F convergiren, dabei ist $\frac{CF}{AF} = \lambda$. Der Brennpunkt F' hinter der Kegelfläche hat seinen conjugirten Brennpunkt vor der Kegelfläche, und alle parallele Strahlen, welche von dieser Seite herkommen, werden in F' convergiren, dabei ist $\frac{CF'}{AF'} = \frac{1}{\lambda}$ und $\frac{AF'}{CF'} = \lambda$. Wenn die Kugel-

fläche das dichtere Medium einschliesst, so sind demnach die beiden Punkte reell. Alle Punkte vor der Kegelfläche, welche zwischen F und dem Punkt des unendlichen Raumes liegen, haben reelle conjugirte Brennpunkte hinter der Kugelfläche; aber diejenigen Punkte, welche vor der Kugelfläche zwischen F und A liegen, sind virtuellen Brennpunkten vor der Kugelfläche conjugirt.

Ist das Medium, welches auf der Seite des Kugelmittelpunktes liegt, das dünnere, so wird $\frac{CF}{AF} = \frac{1}{\lambda}$ und $\frac{CF'}{AF'} = \lambda$; F liegt hinter der Kugelfläche im dünneren Medium, und F' liegt vor der Kugelfläche im dichteren Medium, beide Brennpunkte F und F' sind virtuell. — Allen Punkten, welche vor der Kugelfläche im dichteren Medium liegen, sind virtuelle Brennpunkte vor der Kugelfläche zugeordnet. Alle diese Sätze folgen sogleich aus dem Begriff der anharmonisch proportionalen Theilung.

Wünscht man übrigens die bekannten Formeln für die Brechung auf der Kugelfläche, so können sie ebenfalls leicht aus den Gesetzen der anharmonisch proportionalen Theilung abgeleitet werden. Setzt man zu dem Ende $AC = r$, $AF' = CF = p$, woraus $AF = p - r$, ferner $AB = b$ und $AB' = b'$, so ist für den Fall, dass die Kugelfläche das dichtere Medium einschliesst:

$$\frac{AF'}{CF'} = \lambda, \text{ also } \frac{p}{p-r} = \lambda, \; p = \frac{\lambda r}{\lambda - 1}$$

$$AF = CF' = \frac{AF'}{\lambda} = \frac{r}{\lambda - 1}$$

ferner $\frac{CB}{AB} : \frac{CB'}{AB'} = \lambda$ oder $\frac{b+r}{b} : \frac{b'-r}{b'} = \lambda$,

woraus $\frac{\lambda}{b'} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda - 1}{r}$

Ist dagegen das Medium, welches die Kugelfläche einschliesst, das dünnere, so findet man:

$$\frac{CB}{AB} : \frac{CB'}{AB'} = \frac{1}{\lambda} \text{ oder } \frac{b+r}{b} : \frac{b'+r}{b'} = \frac{1}{\lambda}$$

woraus $\frac{1}{b'} - \frac{\lambda}{b} = \frac{\lambda - 1}{r}$

Das Brechungsgesetz in der Form, welche durch die neuere Geometrie geliefert wurde, ist aber nicht nur viel einfacher, als diese analytische Form desselben, sondern es gewährt auch noch den weiteren Nutzen, dass es mit Leichtigkeit auf ausgedehnte Objekte erweitert werden kann. Sind nämlich mehrere leuchtende Punkte B, C, D gegeben, die eine solche Lage zu einander und zur Kugeloberfläche haben, dass

ihre verschiedenen Centralstrahlen nur sehr kleine Winkel mit einander machen, so entsprechen ihnen solche conjugirten Brennpunkte B′, C′, D′, welche die Eigenschaft haben, dass jedes Paar der zugeordneten Brennpunkte seinen Kugelhalbmesser unter demselben Modulus λ anharmonisch proportional theilt. Bei der vorausgesetzten Lage der leuchtenden Punkte ist der Kugelabschnitt, auf welchem die Brechung vor sich geht, so klein, dass er mit einer Tangentialebene A, so weit seine Ausdehnung hier in Betracht kommt, als zusammenfallend betrachtet werden kann. Es können also auch die Kugelhalbmesser mit den Schiefen vertauscht werden, welche zwischen dem Kugelmittelpunkt C und der Tangentialoberfläche A liegen, und die conjugirten Brennpunkte theilen auch diese Schiefen anharmonisch proportional. Hieraus folgt aber, dass die Brennpunkte der gebrochenen Strahlen ein Bild zusammensetzen, welches der Gestalt des Objektes der leuchtenden Punkte perspektivisch collineär ist (§. 47, b). Das Brechungsgesetz für die Kugeloberfläche nimmt also folgende allgemeine Gestalt an:

Bei der Brechung auf der Kugeloberfläche sind Bild und Object homologe Gestalten zweier collineären räumlichen Systeme. Diese Systeme liegen perspektivisch, der Kugelmittelpunkt ist das Centrum, die Tangentialfläche des Kugelabschnittes ist die Axenebene der Collineation, und der Modulus der Collineation ist dem Brechungscoefficienten zwischen den zwei brechenden Medien gleich.

Dieses allgemeine Brechungsgesetz für die Kugelfläche gewährt die Anwendung auf alle einzelne Fälle, die mit derselben Leichtigkeit, wie oben bei der Reflexion geschehen ist, entwickelt werden können. Es mag hier hinreichen, den besonderen Fall noch in's Auge zu fassen, der sich ergibt, wenn die Kugelfläche die Gestalt der Ebene annimmt, und der demjenigen vor die Augen tritt, welcher den benetzten Grund eines ruhig stehenden Wassers und die Dinge, welche in demselben sich befinden, betrachtet. Für diesen besonderen Fall ist der Halbmesser $AC = \infty$, und damit verwandelt sich die Collineation in Affinität; die zwei Hauptbrennpunkte rücken in den unendlichen Raum hinaus, und das Doppelverhältniss

$$\frac{CB}{AB} : \frac{CB'}{AB'} = \lambda$$

verwandelt sich, da $CB = CB' = \infty$, in $\frac{AB'}{AB} = \lambda$.

In dem Fall, dass der Beschauer sich im dünneren Medium befindet, muss $\frac{1}{\lambda}$ statt λ gesetzt werden, so dass $\frac{AB}{AB'} = \lambda$ den Modulus der Affinität bezeichnet.

Es ist noch zu bemerken, dass in dem vorliegenden Falle die Beschränkung, nach welcher die Ausdehnung des Objectes im Verhältniss zu seiner Entfernung von dem Mittelpunkt der Kugelfläche unendlich klein sein muss, hinwegfällt, weil diess bei jedem Objecte endlicher Dimension jedenfalls erfüllt ist, sofern die Ebene als ein Stück einer Kugelfläche zu betrachten ist, deren Halbmesser unendlich gross ist. Es bleibt von jener Beschränkung nur noch das übrig, dass die Collineationsstrahlen senkrecht auf der Brechungsfläche stehen. Das Brechungsgesetz der ebenen Fläche nimmt also folgende Form an:

Wird ein Object von einem Medium aus betrachtet, das in Betreff seiner Dichte verschieden ist von demjenigen, in welchem es sich befindet und das durch eine ebene Fläche von demselben getrennt ist, so ist die Gestalt des Bildes der Gestalt des Objectes affin; die ebene Trennungsfläche der zwei Medien ist die Axenebene, die Geraden, welche senkrecht zu dieser Ebene stehen, sind die Strahlen der Affinität, dabei ist der Modulus der Affinität dem Brechungscoefficienten zwischen den zwei gegebenen Mitteln gleich.

Nach diesem Gesetze wird man die bekannten Erfahrungen von der Gestalt der Objekte, welche sich unter Wasser befinden, leicht ableiten; z. B. dass ein geradliniger Stab, theilweise unter Wasser getaucht, so erscheint, als ob er an der Stelle des Wasserspiegels geknickt wäre; dass ein kreisförmiger Cylinder als ein elliptischer erscheint, und eine Kugel als ein Ellipsoïd, dessen lothrechte Axe verkürzt ist etc.

C. Brechung des Lichts in Glaslinsen.

Das obige Brechungsgesetz des Lichtes auf der Kugelfläche ist auch auf die Brechung des Lichtes in einer Glaslinse anwendbar. Sind nämlich C und C' die Mittelpunkte der zwei Kugelflächen der Linse, und befinden sich auf der Axe CC' mehrere leuchtende Punkte B, D, E, so werden ihnen nach der ersten Brechung auf der Kugelfläche C die zugeordneten Brennpunkte B'', D'', E'' der Axenrichtung entsprechen, und zwar wird der Halbmesser CA der Kugelfläche C durch die conjugirten Brennpunkte anharmonisch proportional getheilt, so dass

$$B''D''E''CA \barwedge BDECA \text{ in einstimmiger Lage ist.}$$

Bei der zweiten Brechung auf der Kugelfläche C'A' wird sich derselbe Vorgang noch einmal wiederholen, den Punkten B''D''E'' werden wieder andere zugeordnete Brennpunkte B', D', E' der Axe entsprechen, und es ist auch hier

$$B''D''E''C'A' \barwedge B'D'E'C'A'.$$

Es folgt also, dass auch

$$BDE \barwedge B'D'E'.$$



Die Punkte C und C', A und A' sind, wie die Vergleichung der vorausgehenden conformen Reihen zeigen, nicht homolog. Weil aber die Dicke der Linse AA' im Verhältniss der übrigen hier in Betracht kommenden Distanzen nur ganz unbedeutend ist, so kann man die Punkte A, A' als mit der Mitte O der Linse zusammenfallend betrachten. Und unter dieser Voraussetzung ist BDEO $\barwedge$ B'D'E'O.

Man sieht also, dass die Reihe der leuchtenden Punkte der Reihe der zugeordneten Brennpunkte conform ist, und dass diese zwei in der Richtung der Axe vereinigten Reihen einen Hauptpunkt haben, welcher in der Mitte der Linse liegt. Nur ein Strahl, welcher durch diesen Punkt geht, erleidet keine Brechung, alle anderen Strahlen werden gebrochen. Die Linse kann also nur diesen Hauptpunkt haben. Dann folgt aber aus §. 20, b, dass diese Reihen zwei Gegenpunkte F' und F'' haben, welche in gleicher Entfernung von dem Hauptpunkt O liegen. Diese Gegenpunkte, hier die Hauptbrennpunkte genannt, haben überdiess nach §. 19 eine solche Beziehung zu den anderen homologen Punkten der zwei Reihen, dass das Produkt aus den Abschnitten, welche zwischen zwei Punkten und ihren Gegenpunkten liegen, eine constante Zahl ist. Das Brechungsgesetz der Linse nimmt daher folgende Gestalt an:

Die Reihe der leuchtenden Punkte und die Reihe ihrer zugeordneten Brennpunkte sind einstimmig conform, die Hauptbrennpunkte sind die Gegenpunkte dieser Reihen und liegen auf den zwei Seiten der Linse in gleicher Entfernung von ihrem Mittelpunkt; das Produkt der Abschnitte, welche zwischen zwei einander zugeordneten Brennpunkten und ihren zugehörigen Hauptbrennpunkten liegen, ist eine constante Grösse und dem Quadrat der halben Entfernung ihrer Hauptbrennpunkte gleich.

Die bekannte Formel für die Brechung in der Linse lässt sich sehr leicht aus dem angeführten Gesetze entwickeln. Denn sind B und B' zwei einander zugeordnete Brennpunkte, so ist nach demselben

$$BF \,.\, B'F' = OF^2 = OF'^2$$

Setzt man $BO = b$, $B'O = b'$, $OF = OF' = p$,
so ergibt sich $BF = b - p$, $B'F' = b' - p$, folglich

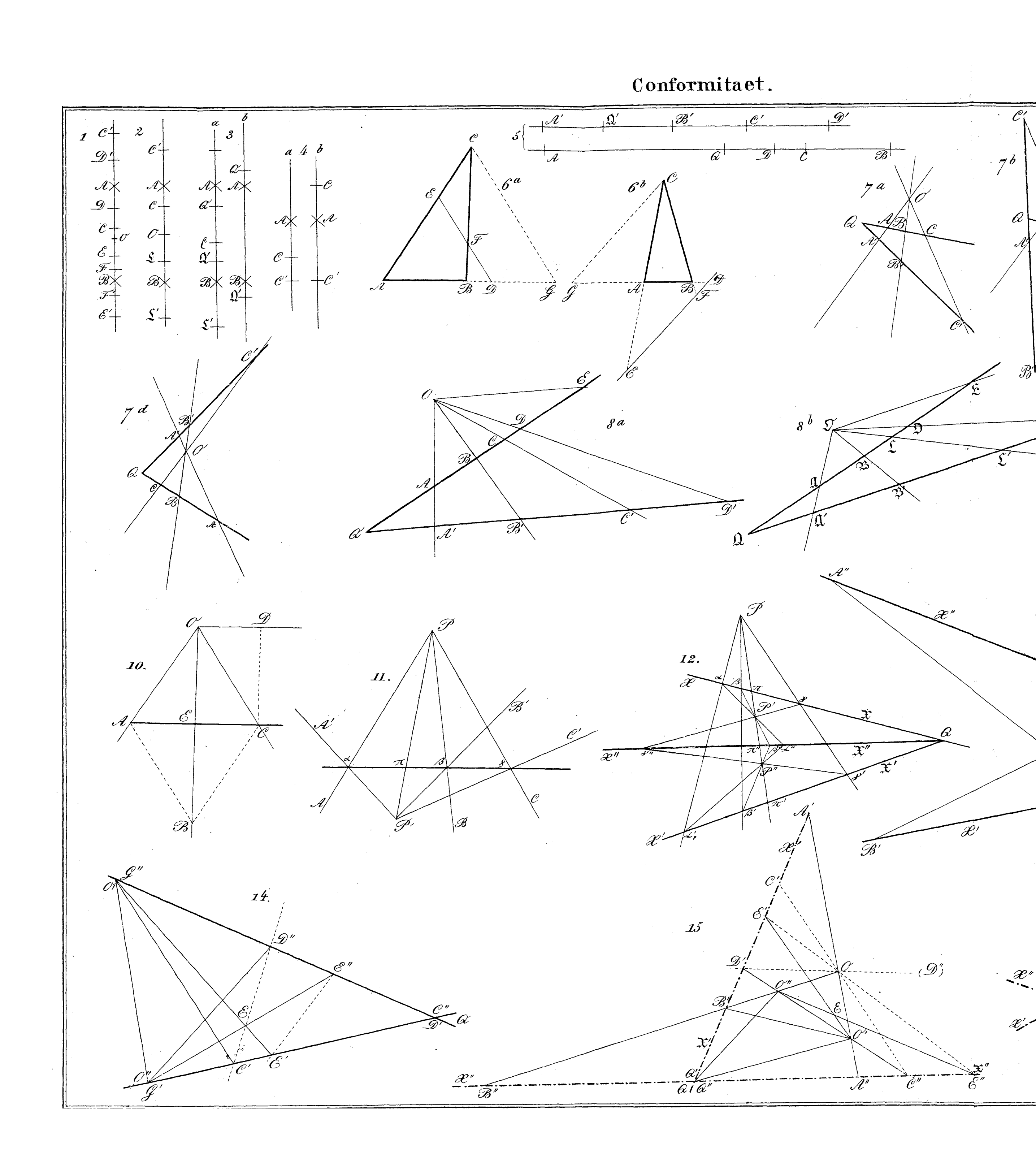
$$(b - p)(b' - p) = p^2, \quad bb' - b'p - bp = 0,$$

woraus $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{p}$.

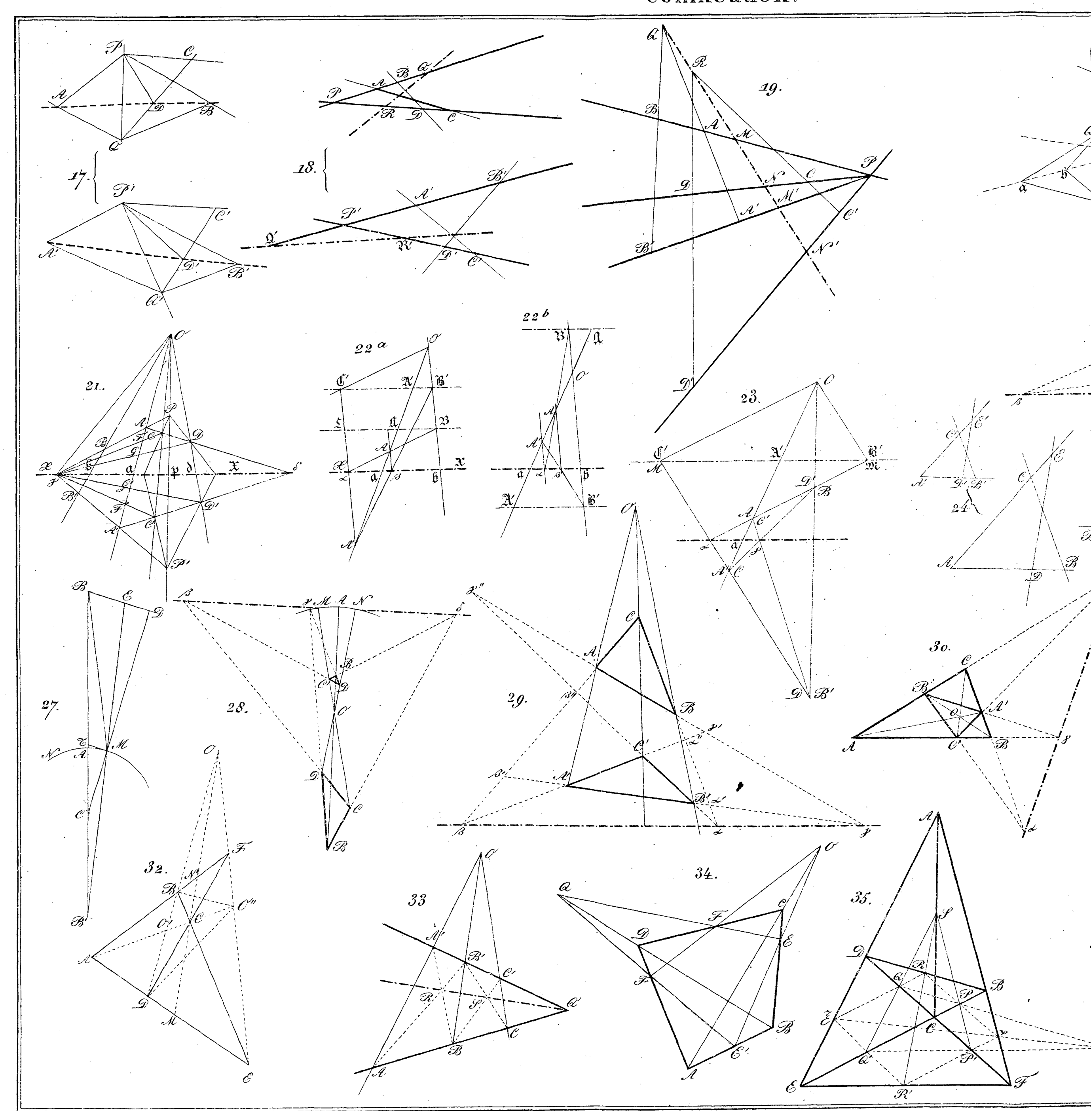
Um übrigens die gegenseitige Lage der einander zugeordneten Brennpunkte zu ermessen, bedarf man dieser Formel nicht; diese Frage wird vielmehr unmittelbar durch die Gesetze, die in §. 20 ausgesprochen sind, beantwortet; auch den Unterschied der Sammellinsen und Zerstreuungslinsen wird man leicht entwickeln.

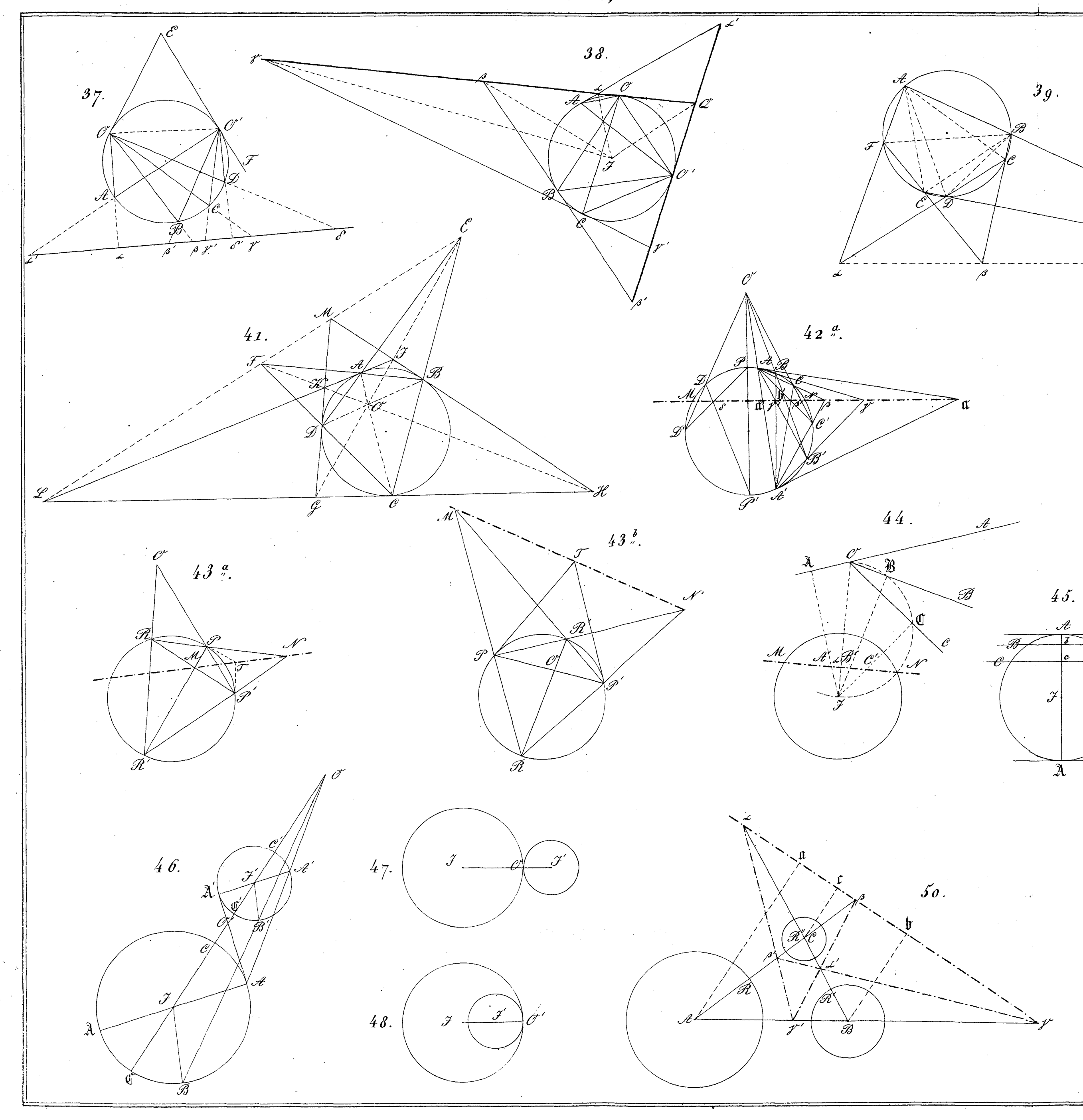
Berichtigungen.

Seite	Zeile		
30	9	setze	fünf statt vier
32	19	„	𝔔 und Q′ statt 𝔔 und Q
34	10	„	$a = +\frac{q}{2} \pm \sqrt{}$ statt $a = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{}$
34	27	„	Hauptpunkte statt Gegenpunkte
43	14	„	endlichen statt endlosen
44	6	„	Vielstrahl st. Strahl
44	28	„	Strahlenpaaren st. Strahlen
44	31	„	mit keinem, oder st. mit zwei, oder
45	16	„	mit st. auf
45	23	„	ihre Lage st. seine Lage
47	23 u. 32	„	§. 18 st. §. 19
48	34	„	§. 17 st. 4. 17
49	9	„	𝔔𝔈′ ∥ 𝔔𝔈 st. 𝔔𝔈′ ∥ 𝔔′𝔈′
49	10	„	QC′ ∥ OE st. OE ∥ QC′
57	21	„	ADEB st. AEDB
60	20	„	DEAM st. DEMA
63	28	„	OO″ st. O′O″
64	9	„	D′ st. D
64	9	„	QD′ EC″ st. QD′ OC″
65	3	„	C,O″ st. CO
69	22	„	PQ u. P′Q′ st. PP′ u. QQ′
70	23	„	Q′, A′P′B′D′ st. Q′, A′B′P′D′
77	35	„	p st. P
83	1	„	§. 47 st. §. 27
87	2 u. 3	„	ihr — sie st. ihm — es
90	19	„	mit vor jenen
94	21	„	Fig. 25 st. Fig. 24
94	24	„	AA′𝔄 st. AA′α
98	2	„	nicht v o r homologen
100	14	„	Abschnitte st. Seiten
101	24	„	QQ′ st. OQ′
109	9	„	§. 62 st. §. 52
118	7	„	P′, A′B′C′CBA st. P, A′B′C′CBA
136	31	„	und st. in
150	2	„	𝔞′𝔟′ des Systems J′ st. 𝔞𝔟 des Systems 𝔍′
153	23	„	und den st. in dem
170	8	„	C″c″ st. C′c″
170	13	„	haben st. sind
174	26	„	F″A′ st. F″A
187	27	„	Collineationssystem st. Combinationssystem
189	6	setze	Pole st. Polaren
192	8	„	die durch st. der durch
195	21	„	ℭ𝔤 st. Cγ'
203	12 u. 13	„	äusseren — inneren statt inneren — äusseren
204	25	„	O st. 𝔒′
208	22	„	diejenigen st. denjenigen
209	21	„	hinreichend st. bestimmt
209	29	„	𝔞 und α st. 𝔞′ und α'
210	19	„	𝔞′α' st. $\alpha\alpha'$
216	33	„	eines der Centra st. einen der Pole
216	34	„	das andere st. den anderen
219	11	„	Seiten st. Diagonalen
219	18	„	O st. 𝔒
223	26	„	inbeschriebenen st. umbeschriebenen
223	33	„	in einem Punkt Q nach entsprechen
218	33	„	C st. O
252	30	„	Modulus v o r der Affinität
257	16	„	endlichen st. unendlichen
258	35	„	m″ st. 𝔐″
263	1 u. 2	„	F″C st. F″C′
264	18	„	halben vor grossen Axe
265	2	„	𝔄F′ st. AF″
268	9	„	ab′𝔞𝔟′ st. ab𝔞𝔟′
271	7 u. 8	„	M′ st. M
274	33 u. 34	„	O′ st. O
281	17 u. 19	„	halbe v o r Substitute
282	23	„	halbe v o r Substitute
289	28	„	endlichen st. unendlichen
295	16	„	Kreis statt Dreieck
296	4	„	2. Viereck ac$\gamma\delta$ st. Viereck ac$\gamma\delta$
296	18	„	Fig. 105 n a c h ABC
302	13	„	der zwei centrischen Systeme n a c h ξ'
302	32	„	AB u. A′B′ statt AA′ u. BB′
303	30	tilge	A nach Convergenzpunkt
304	13	setze	Pξ statt Pξ'

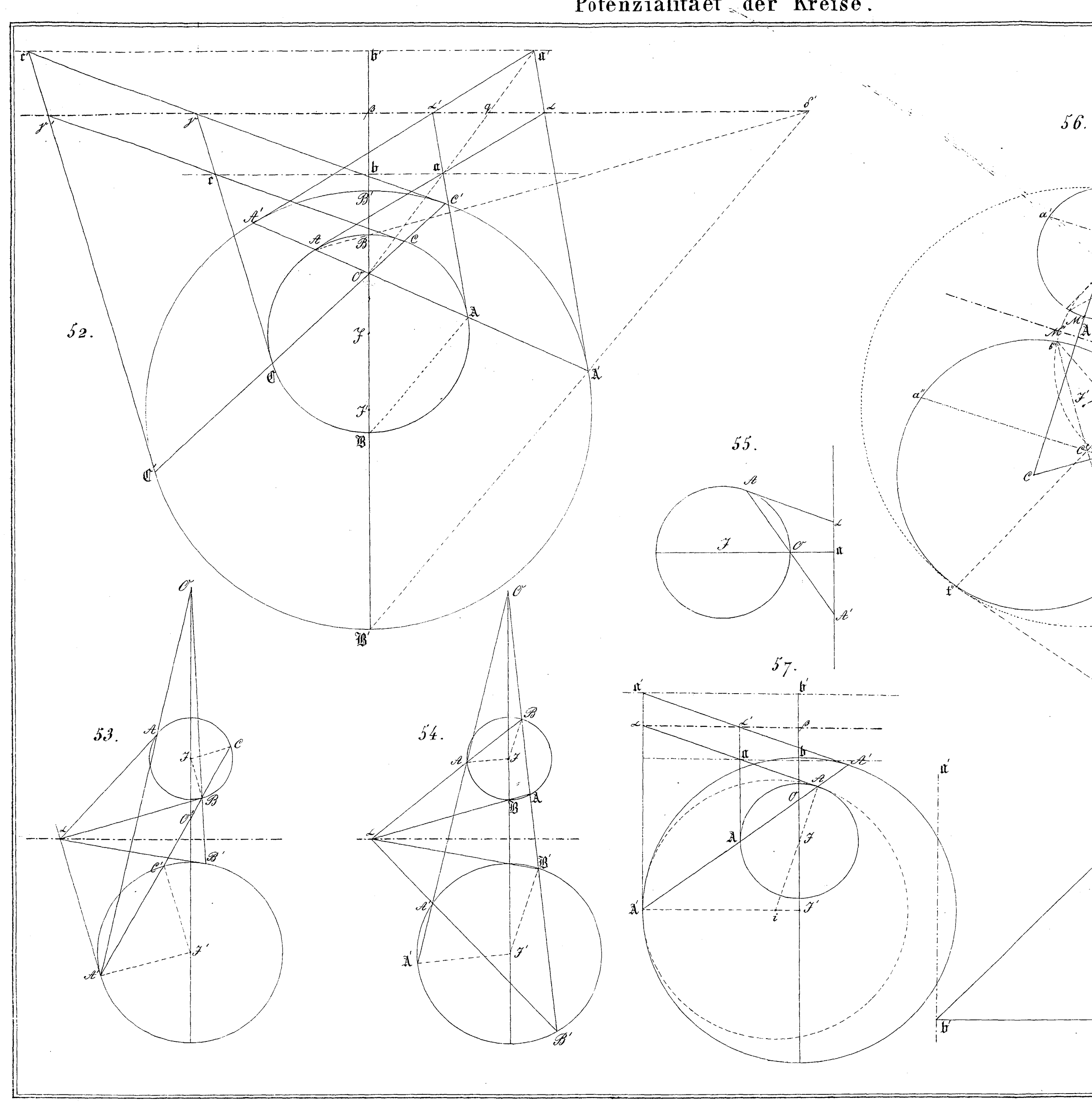


Collineation.

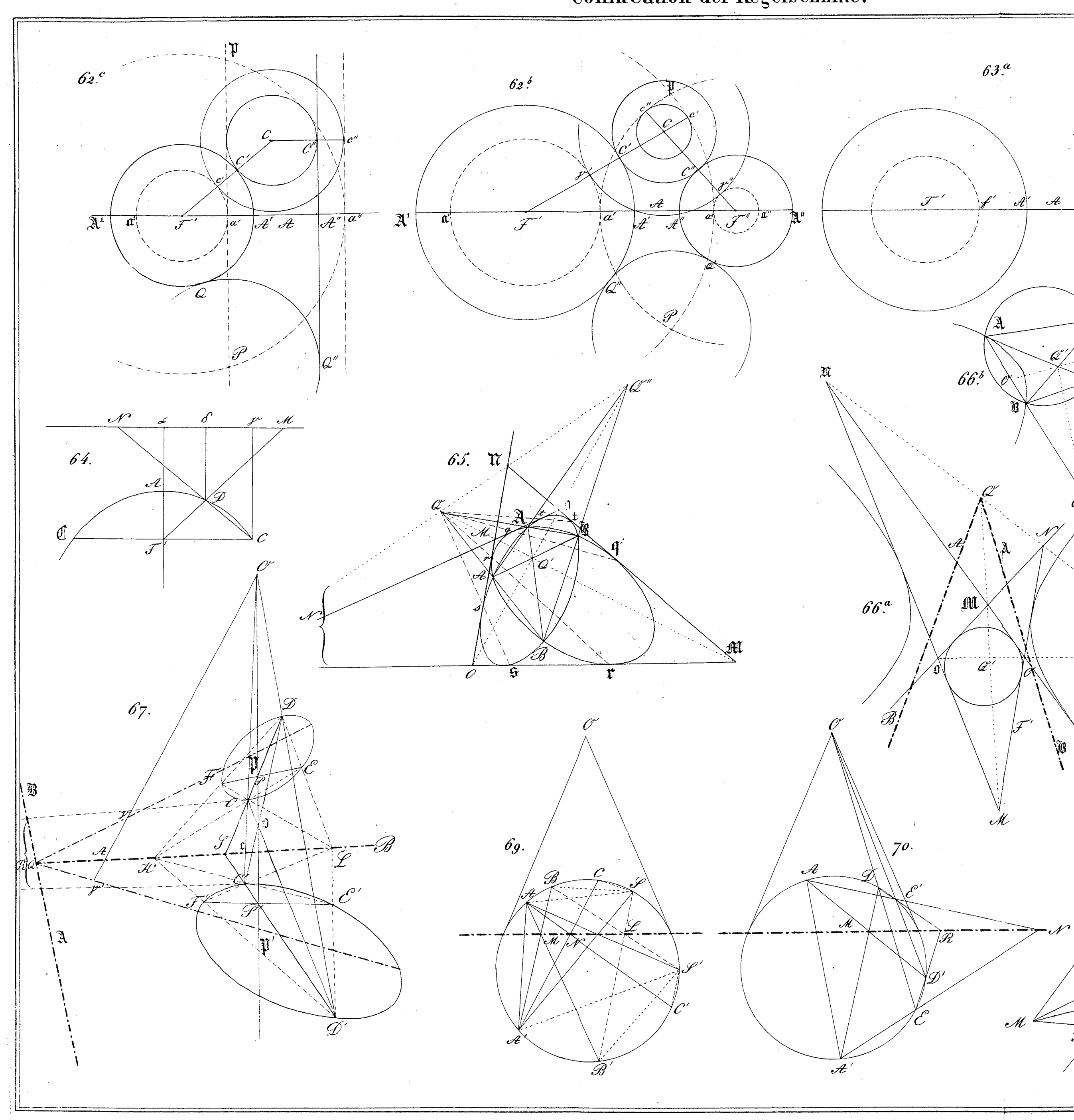


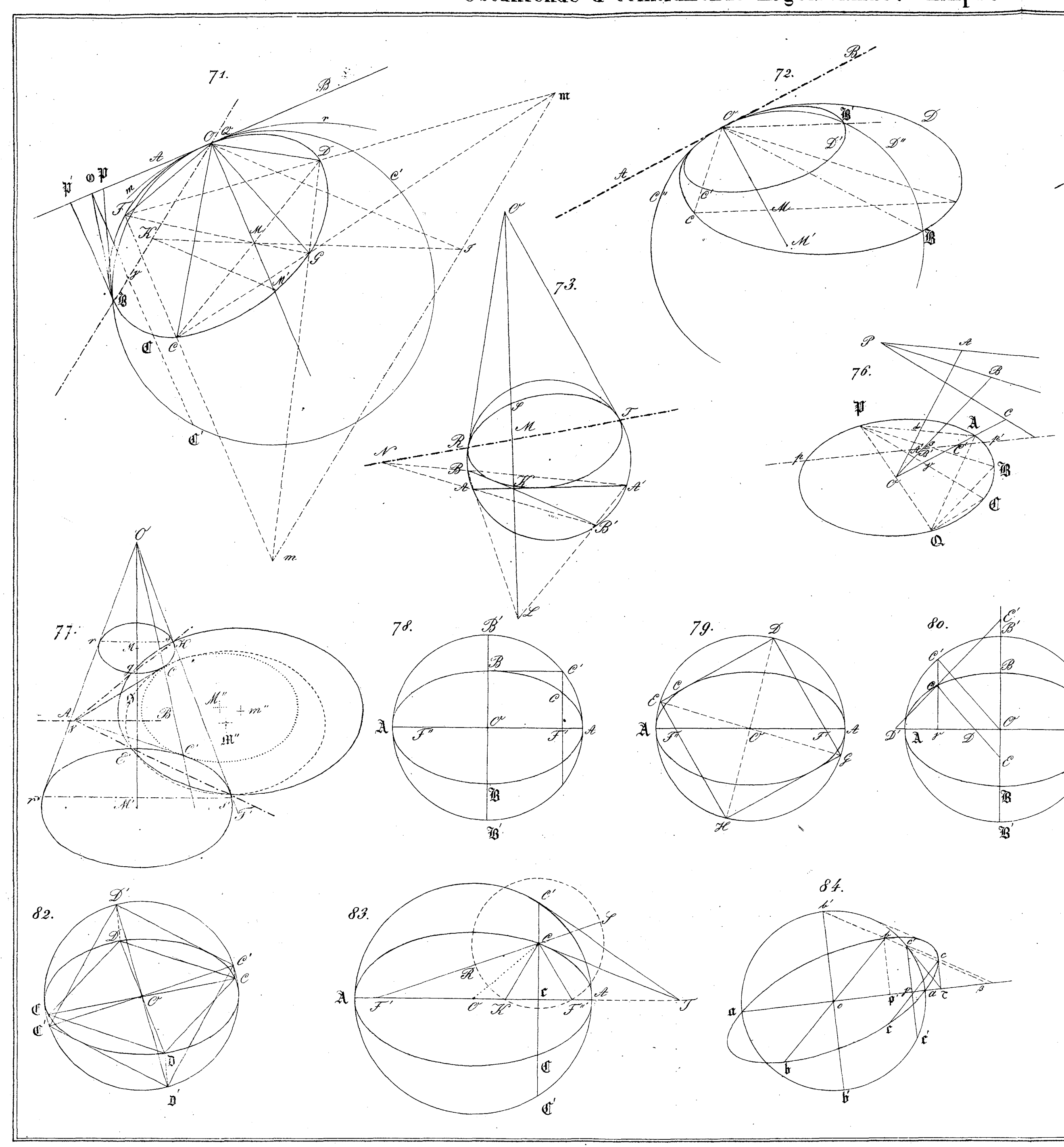

37.
38.
39.
41.
42 a.
43 a.
43 b.
44.
45.
46.
47.
48.
50.

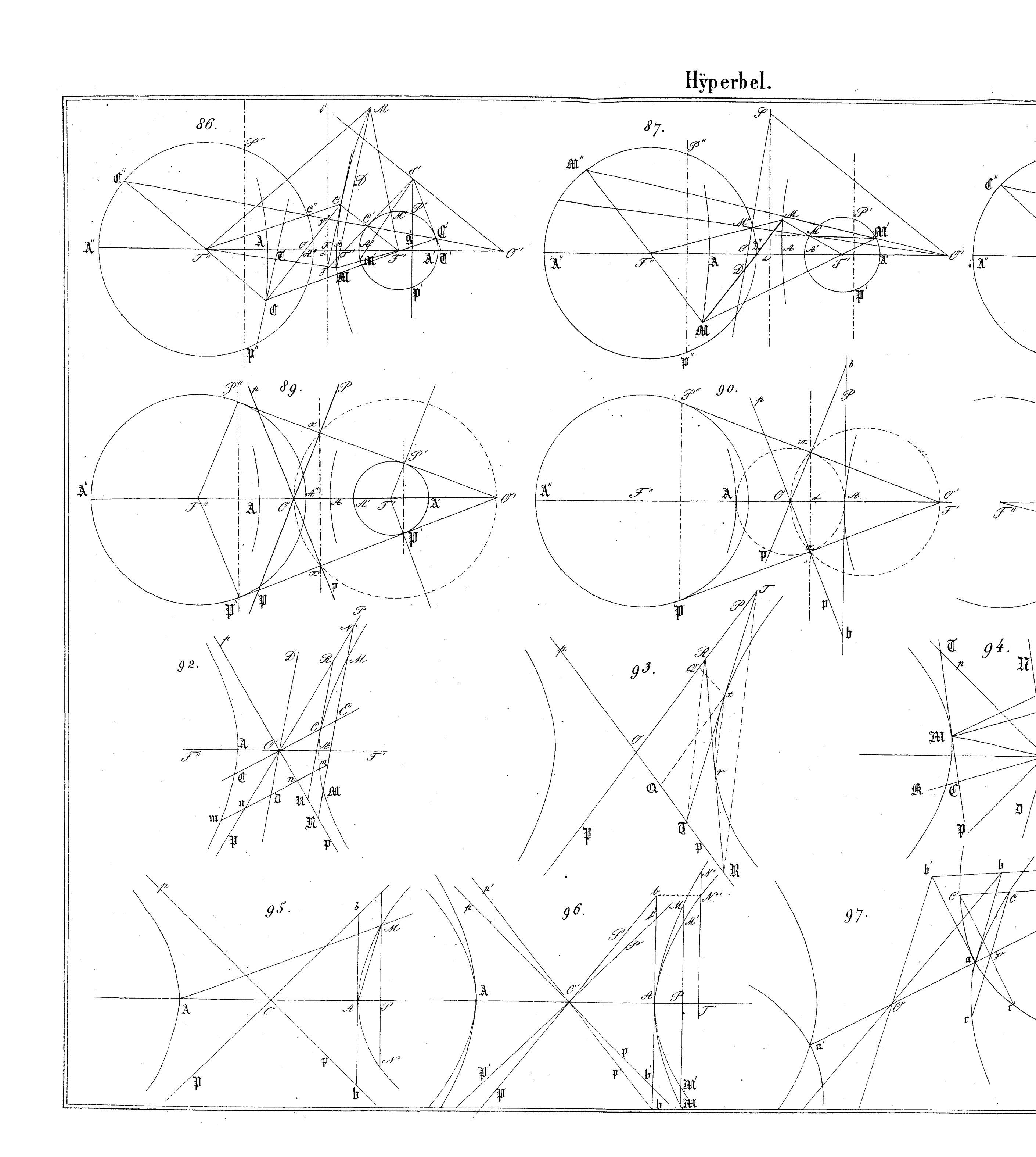
Potenzialitaet der Kreise.



59.a
59.b
59.c
60.a
60.b
60.c
61.c
62.a


62.c
62.b
63.a
64.
65.
66.b
66.a
67.
69.
70.


71.
72.
73.
76.
77.
78.
79.
80.
82.
83.
84.


86.
87.
89.
90.
92.
93.
94.
95.
96.
97.